

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

- 16 **Юдаев Б. Н.**
Теплопередача. Учебник для втузов. М., «Высш. школа», 1973.

360 с. с илл.

В книге рассмотрены физические основы процессов тепло- и массообмена и методы их расчета.

Изложены методы численного решения некоторых дифференциальных уравнений теплообмена. Приведены методы исследования и расчета процессов теплообмена с помощью теории пограничного слоя.

Большое внимание уделено процессам тепло- и массообмена в авиационной и ракетной технике.

В книге использовано достаточное количество нового материала, соответствующего современному уровню знаний в этой области техники.

Ю $\frac{0332 — 303}{001(01) — 73}$ 104 — 73

6П2.2

Рецензенты: проф. А. А. Гухман; кафедра теплофизики Белорусского государственного университета (зав. кафедрой акад. АН БССР А. В. Дыков).

При составлении учебника автор использовал свой двадцатилетний опыт преподавания курса «Теплопередача» и научной работы на одноименной кафедре Московского высшего технического училища им. Баумана.

В книге рассмотрены физические основы переноса теплоты и методы расчета процессов тепло- и массообмена.

Изложен метод обобщенных координат (теория подобия), основные положения которого разработаны учеными нашей страны.

Приведены методы численного решения дифференциальных уравнений теплопроводности.

Должное внимание уделено методу расчета теплообмена между твердым телом и жидкостью с помощью теории пограничного слоя.

В последнее время, используя теорию пограничного слоя и электронно-вычислительные машины, удалось решить много важных задач теплообмена и в том числе о переносе теплоты в турбулентном пограничном слое. В дальнейшем, по-видимому, методы расчета теплообмена с применением электронно-вычислительных машин будут развиваться и, следовательно, при подготовке инженеров на них следует обратить особое внимание. Автор старался изложить эти методы как можно полнее.

Бурное развитие самолетной и ракетной техники стимулировало интенсивные исследования процессов тепло- и массообмена при больших и особенно при сверхзвуковых скоростях полета. Исследовать и рассчитывать такие процессы трудно, так как они осложнены влиянием существенного нагрева от трения, химических реакций, диссоциации и т. д. Поэтому этим процессам уделено большое внимание.

В книге не приводятся задачи и числовые примеры, так как ранее коллективом кафедры под редакцией автора было написано учебное пособие «Сборник задач по технической термодинамике и теплопередаче», второе издание которого вышло в свет в 1968 г. [97].

В книге используются труды крупных отечественных и иностранных ученых М. В. Кирпичева, М. А. Михеева, А. А. Гухмана, А. В. Лыкова, А. А. Дородницына, С. С. Кутателадзе, Г. Н. Кружилина, Л. Прандтля, Г. Кармана, Г. Шлихтинга, Э. Р. Эккерта, Ван Дрифта и многих других.

Автор будет благодарен за все замечания и пожелания, направленные на улучшение книги.

Автор

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ

В курсе «Теплопередача» изучаются самопроизвольные необратимые процессы распределения (переноса) теплоты в пространстве с неоднородным полем температуры.

При работе тепловых двигателей, компрессоров, холодильных установок, высокоскоростных летательных аппаратов отдельные части и узлы этих установок нагреваются. Для того чтобы конструкция работала надежно, необходимо предусмотреть меры, которые установили бы предел росту температуры. В противном случае нормальная работа таких установок может прекратиться, так как конструкционные материалы при нагревании теряют прочность и при определенной температуре разрушаются. Например, если не предусмотреть специальных мер для защиты камеры сгорания и сопла, то ракетный двигатель разрушится в течение долей секунды. Баллистическая ракета, входящая в плотные слои атмосферы, без тепловой защиты ее головной части и стенок корпуса разрушится в течение нескольких секунд, так как температура ее головной части при этом достигает нескольких тысяч градусов.

При работе компактных электронных устройств генерируется теплота, которая может повысить температуру отдельных элементов до уровня, при котором устройство не будет выполнять своих функций.

Здесь приведены некоторые примеры, в которых следует снизить интенсивность процессов переноса теплоты к их отдельным элементам. В то же время во многих других устройствах следует повысить интенсивность процессов переноса теплоты.

Например, в теплообменниках — аппаратах, где осуществляется теплообмен между двумя или несколькими теплоносителями* или между теплоносителями и твердыми телами (стенкой, насадкой), стремятся повысить интенсивность теплообмена для уменьшения их размеров (затраты материала).

Все эти примеры убедительно говорят о том, что при конструировании тепловых двигателей, машин, летательных аппаратов и ряда других устройств следует учитывать процессы переноса теплоты. В ряде случаев эти процессы становятся определяющими при выборе конструкции.

Сложный процесс переноса теплоты разбивают на ряд более простых: теплопроводность, конвекция и тепло-

* Теплоноситель — движущаяся среда, используемая для переноса теплоты. Здесь и в дальнейшем мы будем использовать для объяснения терминов «Сборник рекомендуемых терминов», составленный Академией наук СССР [74].

обмен излучением. Такой прием упрощает его изучение. Кроме того, как будет показано ниже, каждый простой процесс переноса теплоты подчиняется своим законам.

Различают молекулярный и конвективный механизмы переноса теплоты.

Молекулярный перенос теплоты осуществляется посредством теплового движения микрочастиц в среде с неоднородным распределением температуры.

Конвективный перенос теплоты осуществляется в среде с неоднородным распределением скорости и температуры макроскопическими элементами среды при их перемещении.

Теплопроводностью называют молекулярный перенос теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры, представленного уравнением (I-3).

Конвективным теплообменом называют процесс, обусловленный совместным действием конвективного и молекулярного переносов теплоты. В инженерной практике большое значение имеет частный случай этого способа переноса теплоты, а именно теплоотдача. Теплоотдачей называют конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью ее раздела с другой средой с твердым телом, жидкостью или газом.

Теплообмен излучением — это процесс, который происходит следующим образом: внутренняя энергия вещества превращается в энергию излучения (энергия фотонов или электромагнитных волн), далее происходит распространение излучения в пространстве (процесс переноса излучения), далее энергия излучения поглощается веществом, которое оказалось на пути фотонов или электромагнитных волн.

В природных объектах и инженерных сооружениях теплота переносится всеми тремя способами одновременно — такой процесс называется теплопередачей. Во многих случаях удается выделить способ, на который приходится большее количество перенесенной теплоты. Тогда задача об определении ее количества оказывается относительно простой. В тех случаях, когда это сделать не удастся, задача усложняется.

Теплопередача связана с весьма сложными процессами и при ее изучении надо знать законы и методы анализа, применяемые в физике, термодинамике, гидрогазодинамике и химии.

§ 1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Опытами установлено, что количество теплоты, передаваемое через плоскую стенку, прямо пропорционально разности температур горячей t_{w_1} и холодной t_{w_2} сторон стенки, площади стенки F и времени τ и обратно пропорционально толщине δ стенки (рис. I-1)

$$Q = \lambda \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\delta} F \tau, \quad (I-1)$$

где $\lambda \left[\frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \right]$ — коэффициент пропорциональности, который принято называть коэффициентом теплопроводности

$$\lambda = \frac{Q\delta}{F\tau(t_{w_1} - t_{w_2})}$$

Представим (I-1) в виде

$$q = \frac{Q}{F\tau} = \lambda \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\delta}, \quad (\text{I-2})$$

где $\frac{\lambda}{\delta}$ — тепловая проводимость;

q — плотность теплового потока (или для краткости можно называть просто тепловым потоком).

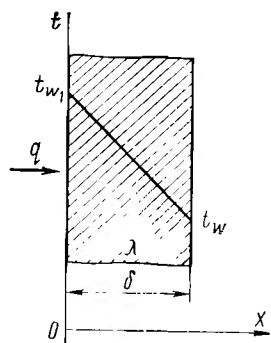


Рис. I-1. Распределение температуры в плоской стенке

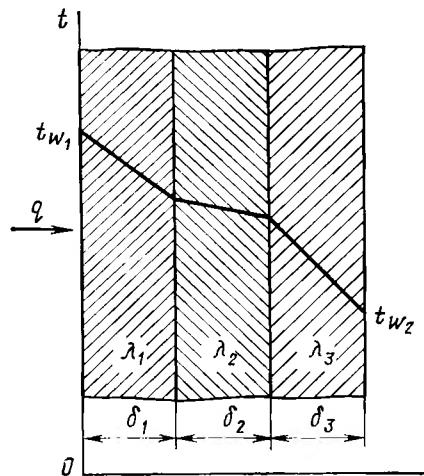


Рис. I-2. Распределение температуры в многослойной плоской стенке

Фурье выдвинул гипотезу, согласно которой тепловой поток прямо пропорционален градиенту температуры*, т. е.

$$q = -\lambda \text{grad } T \quad (\text{I-3})$$

или

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (\text{I-3a})$$

где n — нормаль к изотермической поверхности.

С тех пор эта гипотеза многократно подтверждалась экспериментально и теперь она имеет значение физического закона.

* Вектор $\text{grad } T$ считают положительным, если он направлен в сторону возрастания температуры, а вектор теплового потока q — положительным, если он направлен в сторону уменьшения температуры, поэтому в (I-3) стоит минус.

Представим (I-2) в виде

$$t_{w_1} - t_{w_2} = q \frac{\delta}{\lambda}. \quad (\text{I-4})$$

Здесь $\frac{\delta}{\lambda}$ — тепловое сопротивление.

Определим тепловое сопротивление многослойной стенки (рис. I-2). Напишем (I-4) для каждого слоя

$$\left. \begin{aligned} t_{w_1} - t'_w &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1}, \\ t'_w - t''_w &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2}, \\ t''_w - t_{w_2} &= q \frac{\delta_3}{\lambda_3}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-5})$$

где t'_w и t''_w — температуры на поверхностях соприкосновения соответственно первого — второго и второго — третьего слоев.

Сложим (I-5) почленно

$$t_{w_1} - t_{w_2} = q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right).$$

Из полученного уравнения следует, что тепловое сопротивление многослойной стенки равно сумме тепловых сопротивлений отдельных слоев.

Формула для определения теплового потока через многослойную стенку имеет вид

$$q = (t_{w_1} - t_{w_2}) / \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (\text{I-6})$$

§ 2. ТЕПЛООТДАЧА И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Определим тепловой поток q от жидкости с температурой t_{f_1} к жидкости с температурой t_{f_2} через твердую стенку (рис. I-3); температуры t_{w_1} и t_{w_2} обычно не известны.

Опытами установлено, что температура жидкости резко изменяется в тонком слое у стенки Δ_1 и Δ_2 (рис. I-3). Этот слой называют тепловым пограничным слоем.

В пограничном слое будет происходить интенсивный перенос теплоты, так как здесь имеется большой градиент температуры. Для определения теплового потока q по уравнению (I-3) надо знать распределение температуры по толщине пограничного слоя, т. е. функцию $t = t(x)$. Однако найти эту зависимость как теоретически, так и экспериментально трудно (гл. VII). Поэтому величину q часто определяют по формуле Ньютона

$$q = \alpha(t_1 - t_2). \quad (\text{I-7})$$

Величину α называют коэффициентом теплоотдачи. Он характеризует интенсивность теплоотдачи и равен плотности теплового потока q на поверхности раздела, отнесенной к температурному напору $(t_1 - t_2)$ между средой и поверхностью.

Формула (I-7) для определения теплового потока от жидкости к твердому телу (или обратно) оказывается более удобной, чем формула (I-3), так как коэффициент α проще определить экспериментально, чем зависимость $t = t(x)$. Определить коэффициент теплоотдачи α теоретически трудно (гл. VII). Продолжим решение задачи, поставленной в начале параграфа.

Тепловой поток к левой поверхности стенки (рис. I-3) можно определить по формул

$$q = \alpha_1 (t_{f,1} - t_{w,1}); \quad (I-8)$$

через стенку

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w,1} - t_{w,2}); \quad (I-9)$$

от правой поверхности стенки

$$q = \alpha_2 (t_{w,2} - t_{f,2}). \quad (I-10)$$

После простых преобразований формул (I-8, I-9 и I-10) получим

$$t_{f,1} - t_{f,2} = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right). \quad (I-11)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2},$$

где $\frac{1}{k}$ — суммарное тепловое сопротивление пограничного слоя жидкости на левой поверхности стенки (см. рис. I-3), твердой стенки и пограничного слоя жидкости на правой поверхности.

Величину

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (I-12)$$

называют коэффициентом теплопередачи.

Тепловой поток с учетом (I-12) можно представить в виде

$$q = k (t_{f,1} - t_{f,2}). \quad (I-13)$$

Уравнение (I-13) не вносит никакого вклада в выяснение физической сущности процесса переноса теплоты, но оно удобно для практических расчетов.

§ 3. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Тепловой поток при переносе теплоты излучением от абсолютно черного тела* определяют из выражения

$$q = \sigma_0 T^4, \quad (I-14)$$

где σ_0 — константа излучения абсолютно черного тела, равная $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ [вт/м}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^4]$.

Уравнение (I-14) составляет содержание закона Стефана — Больцмана для черных тел.

Тепловой поток при переносе теплоты излучением от нечерных тел определяют из выражения

$$q = \varepsilon \sigma_0 T^4, \quad (I-15)$$

где ε — степень черноты, определяемая экспериментально; изменяется она в пределах от нуля до единицы. Значения ε для различных веществ приводятся в справочной литературе [47, 61, 97].

Уравнение (I-15) составляет содержание закона Стефана — Больцмана для нечерных тел.

§ 4. КОЭФФИЦИЕНТ ВЯЗКОСТИ

На процесс переноса теплоты существенно влияет вязкость жидкости. Это влияние учитывают с помощью коэффициента вязкости.

Пусть между двумя параллельными пластинами неподвижной a и подвижной b находится слой жидкости толщиной h ; давление во всех точках слоя одинаковое, пластина b движется с постоянной скоростью W_x (рис. I-4). Опыт показывает, что жидкость не скользит по поверхности пластин, а прилипает к ним; распределение скорости по толщине слоя жидкости линейное

$$w_x(y) = \frac{y}{h} W_x. \quad (I-16)$$

Кроме того, для перемещения верхней пластины b к ней должна быть приложена сила в направлении движения, которая будет преодолевать сопротивление движению от трения. Следовательно, сила, приложенная к верхней пластине, уравновешивает силы трения. Силу, приложенную к верхней пластине b , отнесенную к единице ее площади, обозначим через τ ; опытами установлено, что в заданных условиях

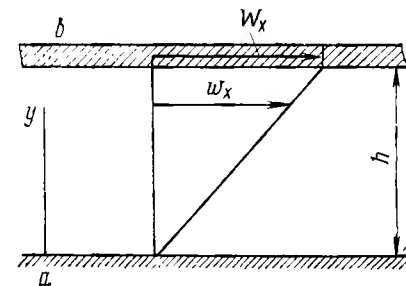


Рис. I-4. К выводу уравнения (I-16)

* Абсолютно черным телом называют такое, которое поглощает всю падающую на него энергию излучения; в то же время такое тело испускает при данной температуре наибольшее количество энергии излучения по сравнению со всеми другими нечерными телами. Абсолютно черных тел в природе нет.

величина τ пропорциональна отношению W_x/h . В общем случае зависимость τ от распределения скорости по y имеет вид

$$\tau = \mu \frac{dw_x}{dy}, \quad (I-17)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости, являющийся физической характеристикой жидкости, $(н \cdot сек)/м^2$.

Выражение (I-17) составляет содержание закона трения Ньютона. Величину

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (I-18)$$

(где ρ — плотность вещества) называют кинематическим коэффициентом вязкости.

Оба коэффициента μ и ν используются при исследовании теплоотдачи.

Динамический коэффициент вязкости почти не зависит от давления, но сильно зависит от температуры (для капельных жидкостей с ростом температуры он уменьшается, а для газов увеличивается).

Зависимость коэффициента μ от температуры для газов можно представить в виде

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2}, \quad (I-19)$$

где μ_0 — коэффициент вязкости при $T = 273^\circ$;

C — постоянная Сатерленда.

Величины μ_0 и C для различных газов даны в табл. I-1 [15].

Таблица I-1

Название газа	$\mu_0 \cdot 10^4, (н \cdot сек/м^2)$	C
Воздух	1,71	117
Аргон	2,10	170
Азот	1,70	111
Водяной пар	0,92	650

Данные, приведенные в табл. I-1, получены экспериментально. Экспериментальные значения коэффициента вязкости для различных жидкостей приводятся в [47, 97].

Зависимость коэффициента вязкости μ от свойств газов можно установить не только экспериментально, но и с помощью кинетической теории газов [16, 76]. Пусть идеализированный газ состоит из молекул, которые будем считать абсолютно твердыми шарами с диаметром d^* , массой m , средней скоростью $\bar{v}$; газ находится в сосуде с ли-

* Приняв молекулы за абсолютно твердые шары, тем самым предопределяют характер взаимодействия между ними; в общем случае взаимодействия под диаметром d понимают расстояние, на которое в среднем могут сближаться молекулы [76].

нейными размерами L , а число молекул в единице объема равно n . Обозначим среднюю длину свободного пробега молекул между их соударениями через $\bar{l}$ и рассмотрим случаи, когда 1) $\bar{l} \gg d$ и 2) $L \gg \bar{l}$.

При выполнении условия (1) молекулы двигаются в основном по прямым линиям и преобладающими будут парные столкновения между ними.

Условие (2) выполняется при среднем давлении газа, когда каждая молекула, проходя сквозь газ, встречает на своем пути множество других молекул; существенную роль при этом играют двойные столкновения молекул.

Во многих практических задачах газ находится в таком состоянии, при котором соблюдаются условия (1) и (2).

Если допустить, что в одноатомном газе происходят в основном двойные столкновения и более сложных столкновений нет, то удастся найти связь между коэффициентом вязкости μ и такими величинами, как плотность газа ρ , средняя скорость движения молекул $\bar{v}$ и средняя длина свободного пробега молекулы $\bar{l}$, которая имеет вид

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{l}. \quad (I-20)$$

Формулу (I-20) впервые вывел Максвелл.

Для средней скорости перемещения молекул получена формула

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (I-21)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/град}$ — константа Больцмана.

Для средней длины свободного пробега молекул получена формула

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2} n d^2}. \quad (I-22)$$

С помощью кинетической теории газов разработаны приближенные методы определения коэффициентов вязкости μ для смеси газов [16, 27].

§ 5. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Обычно коэффициент теплопроводности λ (I-1) определяют экспериментально. Величина λ зависит от физических свойств и температуры вещества, а для газов и паров также и от давления.

Зависимость коэффициента теплопроводности газов от температуры можно представить в виде

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2}, \quad (I-23)$$

где λ_0 — коэффициент теплопроводности при температуре $T = 273^\circ$.

Степенной закон (I-23) удовлетворительно согласуется с опытными данными для многих газов.

Для различных веществ коэффициент теплопроводности изменяется в широких пределах, например:

для различных газов

$$0,6 \geq \lambda \geq 0,006 \text{ вт/(м·град)};$$

для различных капельных жидкостей

$$0,7 \geq \lambda \geq 0,07 \text{ вт/(м·град)};$$

для металлов — титана $\lambda = 15,1 \text{ вт/(м·град)}$, серебра $\lambda = 419 \text{ вт/(м·град)}$.

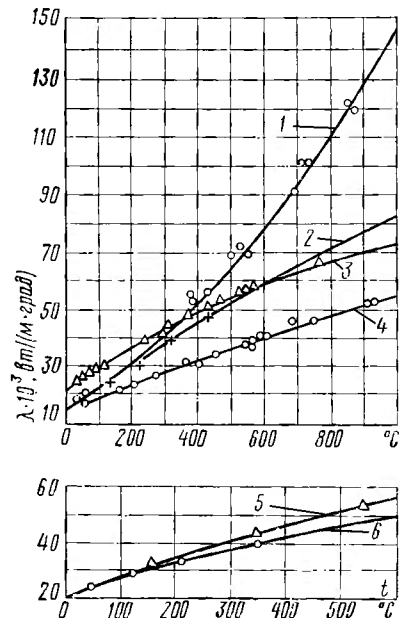


Рис. I-5. Зависимость $\lambda=f(t)$ для некоторых газов:

1 — водяной пар, 2 — углекислота, 3 — воздух, 4 — аргон, 5 — кислород, 6 — азот

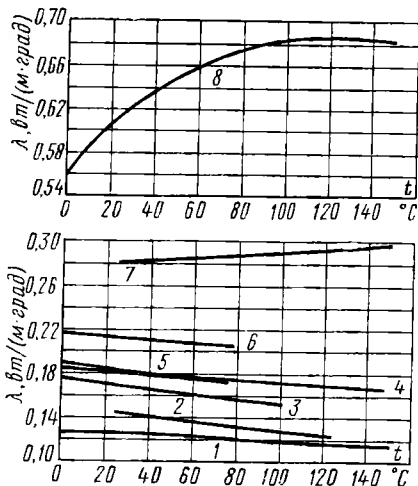


Рис. I-6. Зависимость $\lambda=f(t)$ для некоторых жидкостей:

1 — вазелиновое масло, 2 — бензол, 3 — ацетон, 4 — касторовое масло, 5 — спирт этиловый, 6 — спирт метиловый, 7 — глицерин, 8 — вода

Экспериментальные зависимости $\lambda = f(t)$ для различных веществ приведены на рис. I-5, I-6, I-7 и I-8. Зависимость коэффициента теплопроводности от свойств газов можно установить не только экспериментально, но и теоретически.

Кинетическая теория рассматривает газ как совокупность молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении. В этих условиях процесс переноса теплоты представляется как процесс передачи энергии от одних молекул к другим при их соударении.

В кинетической теории газов получена следующая зависимость для коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = \frac{1}{3} i \bar{v} l \rho c'_v, \quad (\text{I-24})$$

где i — безразмерная константа. Для одноатомного газа $i = \frac{5}{2}$, для

многоатомного газа $i = \frac{1}{4} (9k - 5)$ (здесь $k = \frac{c'_p}{c'_v}$);

c'_v , c'_p — мольные теплоемкости газа в процессах при постоянных объеме и давлении.

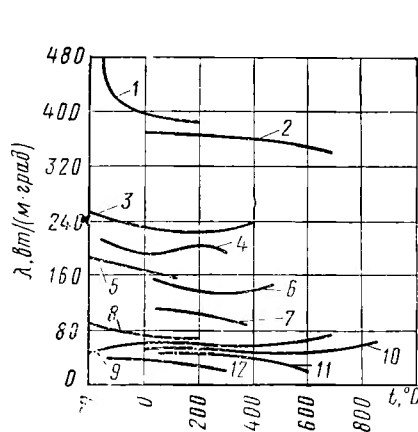


Рис. I-7. Зависимость $\lambda=f(t)$ для некоторых металлов:

1 — медь чистая, 2 — медь 99,9%-ная, 3 — алюминий 99,7%-ный, 4 — алюминий 99,0%-ный, 5 — марганец чистый, 6 — марганец 99,6%-ный, 7 — цинк 99,8%-ный, 8 — платина чистая, 9 — никель 99%-ный, 10 — никель 97%-ный, 11 — железо 99,2%-ное, 12 — свинец технически чистый

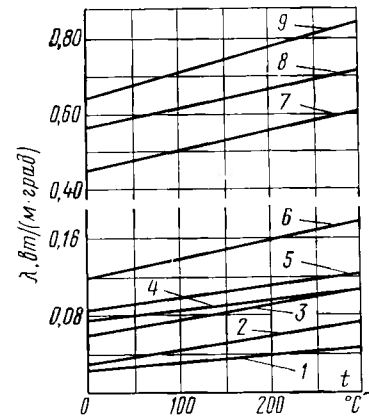


Рис. I-8. Зависимость $\lambda=f(t)$ для некоторых строительных и теплоизоляционных материалов:

1 — воздух, 2 — минеральная шерсть, 3 — шлаковая вата, 4 — ньювель, 5 — совелит, 6 — диатомовый кирпич, 7 — красный кирпич, 8 — шлакобетонный кирпич, 9 — шамотный кирпич

Для одноатомного газа формулу (I-24) можно представить в более удобной для практических расчетов форме. Для этого подставим в (I-24) значение теплоемкости

$$c'_v = \frac{3}{2} R'$$

(здесь R' — универсальная газовая постоянная) и, учитывая (I-20), получим

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 3\mu \cdot \frac{3}{2} R' = \frac{15}{4} R' \mu. \quad (\text{I-25})$$

Из формулы (I-25) видно, что коэффициенты вязкости и теплопроводности идеализированного газа (§ 4) связаны между собой.

С помощью кинетической теории газов разработаны приближенные методы определения коэффициентов теплопроводности λ для смесей газов [16, 27].

§ 6. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООТДАЧИ

Для определения теплового потока по формуле Ньютона (I-7) необходимо знать величину коэффициента теплоотдачи α . Она колеблется в широком диапазоне в зависимости от условий, в которых происходит теплоотдача, и физических свойств жидкостей, омывающих твердые тела.

Например, коэффициент теплоотдачи α батареи отопления воздуху помещения равен примерно $17 \text{ вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$, а воздуха поверхности баллистического снаряда при его входе в плотные слои атмосферы — $1700 \text{ вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$, т. е. в сто раз больше; коэффициент теплоотдачи α воды внутренней поверхности батареи отопления равен примерно $3500 \text{ вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$, а при конденсации водяного пара на твердой поверхности α может достигать $12\,000 \text{ вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$.

Только в редких случаях удастся определить коэффициент теплоотдачи теоретически (гл. VII). Как правило, он определяется экспериментально, и результаты в виде таблиц, графиков или эмпирических зависимостей приводятся в литературе [10, 15, 45, 47, 51, 61, 97 и др.].

Способы определения коэффициента теплоотдачи α для различных условий теплоотдачи будут рассмотрены в гл. VII, VIII, IX, X, XI, XII.

ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА

Для описания процессов переноса теплоты в вещественной среде в общем случае можно использовать следующие дифференциальные уравнения: сплошности, движения, энергии и др.

Для описания конкретного процесса переноса теплоты к названным уравнениям необходимо присоединить «краевые условия». В некоторых случаях система из перечисленных дифференциальных уравнений и краевых условий может быть решена (гл. IV, V, VII).

В настоящей главе приведен вывод дифференциальных уравнений сплошности движения и энергии и описано содержание и смысл понятия «краевые условия» [112].

§ 1. УРАВНЕНИЕ СПЛОШНОСТИ

В основе этого уравнения лежит закон сохранения массы.

Для неподвижного элемента объема $\Delta x \Delta y \Delta z$, выделенного в потоке жидкости (рис. II-1), закон сохранения массы можно представить в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{скорость} \\ \text{накопления} \\ \text{массы} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{скорость} \\ \text{прихода} \\ \text{массы} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{скорость} \\ \text{ухода} \\ \text{массы} \end{array} \right\}. \quad (\text{II-1})$$

Напишем уравнение (II-1) для двух граней элемента объема, перпендикулярных оси x :

скорость прихода массы через грань, расположенную на расстоянии x от начала координат, равна

$$(\rho w_x)|_x \Delta y \Delta z;$$

скорость ухода массы через грань, расположенную на расстоянии $x + \Delta x$ от начала координат, равна

$$(\rho w_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z.$$

Аналогичные выражения можно написать для двух других пар граней.

Скорость накопления массы всего элемента объема равна

$$(\Delta x \Delta y \Delta z) \frac{\partial \rho}{\partial \tau}.$$

Подставим полученные выражения в (II-1)

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = & \Delta y \Delta z [(\rho w_x)|_x - (\rho w_x)|_{x+\Delta x}] + \\ & + \Delta x \Delta z [(\rho w_y)|_y - (\rho w_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho w_z)|_z - (\rho w_z)|_{z+\Delta z}]. \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

Разделим все члены уравнения (II-2) на объем элемента и перейдем к пределу. В результате получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho w_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho w_z \right). \quad (\text{II-3})$$

Уравнение (II-3) называют уравнением сплошности. Величина $\rho \mathbf{w}$ — это вектор массовой скорости.

Уравнение (II-3) в векторной форме имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = - (\nabla \cdot \rho \mathbf{w}). \quad (\text{II-4})$$

Член $(\nabla \cdot \rho \mathbf{w})$ называют дивергенцией $\rho \mathbf{w}$ и иногда записывают как $\text{div } \rho \mathbf{w}$. Заметим, что вектор $\rho \mathbf{w}$ представляет собой поток массы и его дивергенция есть скорость растекания (истечения) массы на единицу объема.

Уравнение (II-4) устанавливает, что возрастание плотности неподвижного элемента объема равно скорости втекания массы в этот элемент, деленной на объем.

Уравнение (II-3) можно написать в другой форме. Произведем дифференцирование, указанное в (II-3), и перенесем все производные от ρ в правую часть. В результате получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + w_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right). \quad (\text{II-5})$$

Левая часть уравнения (II-5) представляет собой субстанциальную производную, поэтому это уравнение можно представить в следующей форме:

$$\frac{D\rho}{D\tau} = - \rho (\nabla \cdot \mathbf{w}). \quad (\text{II-6})$$

Уравнение сплошности в форме (II-6) описывает скорость изменения плотности, как ее видел бы наблюдатель, перемещающийся вместе с жидкостью.

В частном случае $\rho = \text{const}$ (несжимаемая жидкость) уравнение (II-6) примет вид

$$(\nabla \cdot \mathbf{w}) = 0. \quad (\text{II-7})$$

Левая часть уравнения (II-6) будет равна нулю, если плотность элемента объема будет оставаться неизменной при его перемещении вместе с потоком жидкости.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Уравнение баланса количества движения для элемента объема $\Delta x \Delta y \Delta z$ (рис. II-2) жидкости можно написать в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{скорость} \\ \text{накопления} \\ \text{количества} \\ \text{движения} \\ \text{в элементе} \\ \text{объема} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{скорость} \\ \text{прихода} \\ \text{количества} \\ \text{движения} \\ \text{в элемент} \\ \text{объема} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{скорость} \\ \text{ухода} \\ \text{количества} \\ \text{движения} \\ \text{из элемента} \\ \text{объема} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{сумма сил,} \\ \text{действующих} \\ \text{на элемент} \\ \text{объема} \end{array} \right\}. \quad (\text{II-8})$$

В общем случае при неустановившемся состоянии жидкость может входить в элемент и выходить из него через все шесть граней в произвольном направлении.

Отметим, что уравнение (II-8) является векторным, поэтому можно написать компоненты уравнения движения для каждого координатного направления x , y и z . Для этого составим выражения x -компонента для каждого члена уравнения (II-8), а y -и z -компоненты напишем по аналогии.

Выразим через параметры потока скорость прихода количества движения внутрь элемента и ухода из него для x -компонента (рис. II-2).

Различают два механизма переноса количества движения:

а) конвективный перенос осуществляется элементарными объемами движущейся жидкости;

б) молекулярный перенос осуществляется молекулами под действием градиента скорости.

Скорость прихода количества движения путем конвективного переноса через левую грань элемента, перпендикулярную оси x и расположенную на расстоянии x от начала координат, равна

$$\rho w_x w_x|_x \Delta y \Delta z; \quad (\text{a})$$

скорость ухода через правую грань, расположенную на расстоянии $x + \Delta x$ от начала координат, равна

$$\rho w_x w_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z. \quad (\text{б})$$

Скорость прихода количества движения через переднюю грань элемента, перпендикулярную оси y , равна

$$\rho w_y w_x|_y \Delta x \Delta z. \quad (\text{в})$$

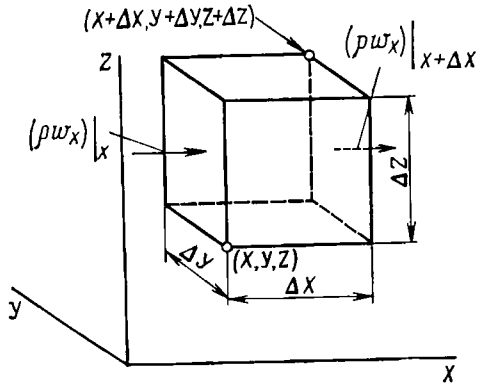


Рис. II-1. К выводу уравнения сплошности

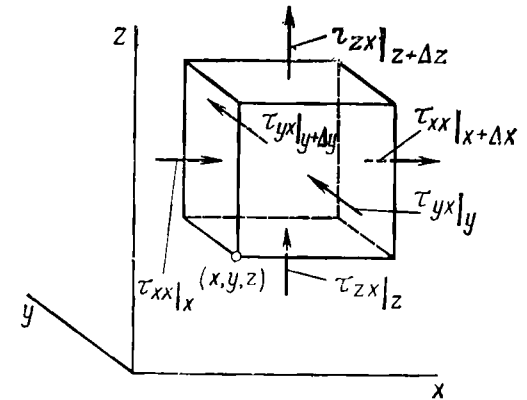


Рис. II-2. К выводу уравнения движения

Подобным же образом можно написать величины скоростей прихода или ухода количества движения для трех других граней элемента объема жидкости (см. рис. II-2).

Скорость накопления количества движения (x -компонента) в элементе объема при конвективном переносе определяется суммированием для всех шести граней величин (а), (б), (в)

$$\begin{aligned} & \Delta y \Delta z (\rho w_x w_x|_x - \rho w_x w_x|_{x+\Delta x}) + \\ & + \Delta x \Delta z (\rho w_y w_x|_y - \rho w_y w_x|_{y+\Delta y}) + \\ & + \Delta x \Delta y (\rho w_z w_x|_z - \rho w_z w_x|_{z+\Delta z}). \end{aligned} \quad (II-9)$$

Скорость прихода количества движения (x -компонента) молекулярным переносом через левую грань элемента равна

$$\tau_{xx}|_x \Delta y \Delta z, \quad (a_1)$$

а скорость ухода через правую грань

$$\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z. \quad (б_1)$$

Скорость прихода через переднюю грань равна

$$\tau_{yx}|_y \Delta x \Delta z. \quad (в_1)$$

Подобным же образом можно написать величины для трех других граней элемента.

Отметим, что τ_{yx} изменяет количество движения (x -компонент) путем воздействия через грань, перпендикулярную оси y .

Суммируя величины (а₁), (б₁) и (в₁) для всех шести граней элемента, получим

$$\begin{aligned} & \Delta y \Delta z (\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) + \\ & + \Delta x \Delta y (\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}). \end{aligned} \quad (II-10)$$

Здесь τ_{xx} — нормальное напряжение на грани элемента, перпендикулярной оси x ; оно направлено вдоль оси x . Это напряжение возникает от сил трения в вязкой жидкости под действием неравномерного распределения скорости в потоке.

Величина τ_{yx} — тангенциальное, или касательное, напряжение на грани элемента, перпендикулярной оси y ; оно направлено вдоль оси x . Это напряжение также возникает от сил трения.

Во многих случаях наиболее важными силами будут те, которые возникают от давления жидкости p , и гравитационные силы на единицу массы g . Проекция на ось x суммы этих сил, приложенных к эле-

менту, равна

$$\Delta y \Delta z (p|_x - p|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (II-11)$$

Давление в движущейся жидкости определяется уравнением состояния; оно является скалярной величиной.

Скорость накопления количества движения (x -компонент) элементом объема в целом (левая часть уравнения II-8) может быть представлена в форме

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho w_x}{\partial \tau}.$$

Теперь подставим найденные величины в уравнение (II-8), разделим все члены на $\Delta x \Delta y \Delta z$ и найдем их предел при Δx , Δy и Δz , стремящихся к нулю. В результате получим x -компонент уравнения движения в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho w_x = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho w_x w_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y w_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho w_z w_x \right) - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x. \end{aligned} \quad (II-12)$$

Подобным же образом можно получить y - и z -компоненты

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho w_y = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho w_x w_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y w_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho w_z w_y \right) - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y; \end{aligned} \quad (II-13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho w_z = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho w_x w_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y w_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho w_z w_z \right) - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z, \end{aligned} \quad (II-14)$$

где ρw_x , ρw_y , ρw_z — компоненты вектора массовой скорости $\rho \mathbf{w}$; g_x , g_y и g_z — компоненты гравитационного ускорения;

$\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ — компоненты вектора $\nabla \cdot p$, известного как градиент p (обычно пишут $\text{grad } p$);

$\rho w_x w_x$, $\rho w_x w_y$, $\rho w_x w_z$, $\rho w_y w_x$ и т. д. — девять компонентов конвективного потока количества движения $\rho \mathbf{w} \mathbf{w}$ продукта двух элементов $\rho \mathbf{w}$ и $\mathbf{w}$;

τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} и т. д. — девять компонентов $\boldsymbol{\tau}$, известного как тензор напряжения.

Уравнения (II-12, II-13, II-14) можно представить в более удобной векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho \mathbf{w} = - [\nabla \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w}] - \nabla \cdot \mathbf{p} -$$

скорость возрастания количества движения на единицу объема	скорость при- роста коли- чества движе- ния за счет конвекции на единицу объема	сила давления к элементу на единицу объема
---	---	---

$$- [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}, \quad (\text{II-15})$$

скорость прироста количества движения за счет молекулярно- го переноса на еди- ницу объема	гравитационная сила к элементу на единицу объема
--	---

Здесь члены $[\nabla \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w}]$ и $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$ не являются простыми дивергенциями, потому что величины $\rho \mathbf{w} \mathbf{w}$ и $\boldsymbol{\tau}$ представляют собой тензоры. Физический смысл $\nabla \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w}$ можно показать, сравнив его с членом $\nabla \cdot \rho \mathbf{w}$, который был описан в § 1.

Величина $[\nabla \cdot \rho \mathbf{w}]$ определяет скорость потери массы (скаляр) потоком жидкости на единицу объема, а величина $[\nabla \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w}]$ — скорость потери количества движения (вектор) потоком жидкости на единицу объема.

Уравнение (II-12) может быть преобразовано с помощью уравнения сплошности следующим образом:

$$\rho \frac{D\mathbf{w}_x}{D\tau} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x. \quad (\text{II-16})$$

Таким же образом как и уравнение (II-16) можно получить y - и z -компоненты.

Когда все три компонента будут объединены в одно векторное уравнение, получим

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{D\tau} = - \nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}. \quad (\text{II-17})$$

ускорение массы на единицу объема	силы давле- ния, дейст- вующие на элемент на единицу объема	силы трения от вязкости, действующие на элемент на единицу объема	силы гравн- тационные, действующие на элемент на единицу объема
--	--	--	--

В этой форме уравнение движения устанавливает, что малый элемент объема, перемещающийся с жидкостью, ускоряется потому, что на него действуют силы. Другими словами оно подтверждает второй закон Ньютона в следующей форме: масса $\times$ ускорение = сумма сил. Мы видим, что уравнение баланса количества движения полностью эквивалентно второму закону Ньютона. Заметим, что две формы уравнения движения (II-15) и (II-17) похожи на две формы уравнения сплошности (II-4) и (II-6) в том смысле, что в каждом случае первая форма показывает баланс для элемента объема, зафиксированного в пространстве, вторая для элемента, который перемещается с движущейся жидкостью.

Исключим из уравнения (II-17) член $(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})$. Для этого используем следующие зависимости:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{w}); \quad (\text{II-18})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{w}); \quad (\text{II-19})$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{w}); \quad (\text{II-20})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right); \quad (\text{II-21})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right); \quad (\text{II-22})$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right). \quad (\text{II-23})$$

В основе этих зависимостей лежит закон трения Стокса, который гласит: *силы, возникающие при деформации капельных жидкостей и газов, пропорциональны скорости деформации*. Вывод этих уравнений громоздок и здесь не приводится, с ним можно познакомиться в специальной литературе [15].

Система из шести уравнений (II-18 ÷ II-23) упрощается для случая, когда поток движется в направлении оси x и ограничен двумя плоскостями, перпендикулярными оси y (рис. I-4), так что w_x есть функция только координаты y . В этом случае

$$\tau_{xx} = \tau_{yx} = \tau_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

и

$$\tau_{yx} = -\mu \left(\frac{dw_x}{dy} \right). \quad (\text{II-24})$$

Подставим уравнения (II-18 ÷ II-23) в уравнение (II-16) и, расширяя полученный результат на y - и z -компоненты, получим

$$\rho \frac{Dw_x}{D\tau} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{w}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x; \quad (\text{II-25})$$

$$\rho \frac{Dw_y}{D\tau} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial w_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{w}) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y; \quad (\text{II-26})$$

$$\rho \frac{Dw_z}{D\tau} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{w}) \right] + \rho g_z. \quad (\text{II-27})$$

Эти уравнения вместе с уравнениями сплошности, уравнением состояния $p = p(\rho)$, зависимостью вязкости от плотности $\mu = \mu(\rho)$ и крае-

выми условиями полностью определяют давление, плотность и компоненты скорости в жидкости, текущей изотермически.

Большое значение для практических расчетов имеют частные случаи полученных уравнений. Для потока жидкости с постоянной плотностью ρ и вязкостью μ справедливо $(\nabla \cdot \mathbf{w}) = 0$ (см. уравнение II-7) и уравнения (II-17, II-18 и II-19) можно представить в виде

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \cdot \mathbf{w} + \rho \mathbf{g}. \quad (\text{II-28})$$

Уравнение (II-28) в декартовых координатах имеет вид

$$\rho \frac{Dw_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x; \quad (\text{II-29})$$

$$\rho \frac{Dw_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y; \quad (\text{II-30})$$

$$\rho \frac{Dw_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z. \quad (\text{II-31})$$

Уравнения (II-29, II-30 и II-31) называют уравнениями Навье — Стокса.

Для частного случая $(\nabla \cdot \mathbf{r}) = 0$ уравнение (II-17) примет вид

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (\text{II-32})$$

Уравнение (II-32) называют уравнением Эйлера. Это уравнение применяют в тех случаях, когда влиянием вязкости в потоке жидкости можно пренебречь.

§ 3. УРАВНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Уравнения движения можно использовать для описания взаимопревращения форм энергии в данном месте текущей жидкости.

Сформируем уравнение, подобное по форме (II-17), но введем в него скалярную величину, обусловленную локальной скоростью $\mathbf{w}$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} w^2 \right) = -(\mathbf{w} \cdot \nabla p) - (\mathbf{w} \cdot [\nabla \cdot \mathbf{r}]) + \rho (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}). \quad (\text{II-33})$$

Это скалярное уравнение описывает скорость изменения кинетической энергии на единицу массы $\left(\frac{1}{2} w^2 \right)$ для элемента жидкости, перемещающегося вниз по потоку.

Перепишем уравнение (II-33) в форме, более удобной для его дальнейшего исследования; представим субстанциальную производную в символах $\frac{d}{dt}$ путем использования уравнения сплошности; каждый из членов, описывающих действие давления и вязкости, разделим на два. Все члены в результирующем уравнении напомним для неподвижного элемента объема, через который протекает жидкость

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho w^2 \right) = -\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho w^2 \mathbf{w} - (\nabla \cdot p \mathbf{w}) -$$

скорость воз-
растания кинетиче-
ской энергии на
единицу объема

скорость подвода
кинетической
энергии посред-
ством потока
массы

скорость произ-
водства работы
давлением окру-
жающей среды
на объем
элемента

$$-p(-\nabla \cdot \mathbf{w}) - (\nabla \cdot [\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}]) -$$

скорость обрати-
мого превращения
работы сил давле-
ния во внутрен-
нюю энергию

скорость произ-
водства работы
вязкостными си-
лами на объем
элемента

$$-(-\mathbf{r} : \nabla \mathbf{w}) + \rho (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}). \quad (\text{II-34})$$

скорость необра-
тимого превраще-
ния работы сил
вязкого трения
во внутреннюю
энергию

скорость произ-
водства работы
гравитационны-
ми силами на
объем элемента

Физический смысл членов $p(\nabla \cdot \mathbf{w})$ и $(\mathbf{r} : \nabla \mathbf{w})$ будет объяснен позднее. Значение этих членов не может быть оценено без изучения уравнения баланса энергии, это будет сделано в следующем параграфе.

Отметим, что член $(-\mathbf{r} : \nabla \mathbf{w})$ всегда положительный, так как он может быть написан как сумма квадратов некоторых членов

$$-\mathbf{r} : \nabla \mathbf{w} = \mu \Phi_w = \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{w}) \delta_{ij} \right]^2, \quad (\text{II-35})$$

где i и j берут по величине x, y, z , т. е. $i, j = x, y, z$, а $\delta_{ij} = 1$ для $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \Phi_w = & 2 \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \left[\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right]^2 + \\ & + \left[\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

Функцию Φ_w называют диссипативной функцией. Эта функция представляет собой количество теплоты, возникающей в потоке вязкой жидкости за счет необратимой работы сил внутреннего (вязкого) трения, и выражается через градиенты скоростей.

Итак, член $(-\mathbf{r} : \nabla \mathbf{w})$ всегда положительный, а это значит, что во всех потоках жидкости происходит деградация механической энергии в тепловую и поэтому реальные процессы необратимы. При отсутствии члена $(\mathbf{r} : \nabla \mathbf{w})$ все формы энергии, включенные в уравнение (II-34) — кинетическая, внутренняя и потенциальная, могут полностью переходить из одной в другую. Присутствие членов $p(\nabla \cdot \mathbf{w})$ и $(\mathbf{r} : \nabla \mathbf{w})$ в уравнении (II-34) говорит о том, что в жидкости может

происходить внутреннее нагревание (охлаждение). Следовательно, когда говорят «изотермическая система», то имеют в виду такую, в которой теплота генерируется (поглощается) так, что не заставляет значительно изменяться температуру.

Явления, которые учитываются членом $p(\mathbf{V} \cdot \mathbf{w})$, могут явиться причиной значительного изменения температуры газа, который очень быстро расширяется или сжимается, например как в компрессорах, турбинах и ударных аэродинамических трубах.

Явления, которые учитываются членом $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{w})$, могут явиться причиной значительного изменения температуры только в высокоскоростных потоках, в которых имеется большой градиент скорости, например, при высокоскоростных полетах, быстрое выдавливание (штамповка) и в смазке подшипников.

Как уже отмечалось, системы уравнений сплошности (II-3), движения (II-25, II-26 и II-27) и состояния в форме $p = p(\rho)$ используются для описания изотермических процессов в текущей жидкости. Если при изменении плотности и давления происходит изменение температуры (неизотермический процесс), то к системе уравнений сплошности и движения следует присовокупить уравнение состояния в форме $F(p, \rho, T) = 0$.

Для идеального газа уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho RT. \quad (\text{II-37})$$

§ 4. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

В основе уравнения энергии лежит закон сохранения энергии. Рассмотрим неподвижный элемент объема, через который течет однородная жидкость. Напишем этот закон для жидкости, содержащейся внутри выделенного элемента объема в данный момент времени

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{скорость} \\ \text{накапливания} \\ \text{внутренней и} \\ \text{кинетической} \\ \text{энергий} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{скорости прихода} \\ \text{да внутренней} \\ \text{и кинетической} \\ \text{энергий по} \\ \text{средством кон-} \\ \text{векции} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{скорость ухода} \\ \text{внутренней и} \\ \text{кинетической} \\ \text{энергий посред-} \\ \text{ством кон-} \\ \text{векции} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{скорость под-} \\ \text{вода теплоты} \\ \text{посредством} \\ \text{теплопровод-} \\ \text{ности} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{скорость про-} \\ \text{изводства ра-} \\ \text{боты системой} \\ \text{над окружаю-} \\ \text{щей средой} \end{array} \right\}. \quad (\text{II-38})$$

В уравнении (II-38) под кинетической энергией понимается энергия видимого движения жидкости $\left(\frac{1}{2} \rho w^2\right)$ на единицу объема. Под внутренней энергией жидкости понимается сумма внутренней кинетической энергии теплового движения молекул и внутренней потенциальной энергии взаимодействия между молекулами; внутренняя энергия жидкости зависит от ее локальной температуры и плотности.

Потенциальная энергия потока не входит в уравнение (II-38) в явном виде, она включена в термин «работа».

Напишем выражения для отдельных членов, входящих в уравнение (II-38).

Скорость накапливания внутренней и кинетической энергий элементом объема $\Delta x \Delta y \Delta z$ (см. рис. II-2) равна

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right), \quad (\text{II-39})$$

где u — внутренняя энергия жидкости на единицу ее массы;
 w — величина локальной скорости жидкости.

Результирующая скорость прихода внутренней и кинетической энергий в элемент объема равна

$$\begin{aligned} & \Delta y \Delta z \left\{ w_x \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) \Big|_x - w_x \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) \Big|_{x+\Delta x} \right\} + \\ & + \Delta x \Delta z \left\{ w_y \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) \Big|_y - w_y \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) \Big|_{y+\Delta y} \right\} + \\ & + \Delta x \Delta y \left\{ w_z \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) \Big|_z - w_z \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) \Big|_{z+\Delta z} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II-40})$$

Скорость подвода энергии посредством теплопроводности равна

$$\Delta y \Delta z \{ q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x} \} + \Delta x \Delta z \{ q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y} \} + \Delta x \Delta y \{ q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z} \}. \quad (\text{II-41})$$

Здесь q_x, q_y, q_z — компоненты вектора плотности теплового потока q .

Работа, совершенная элементом объема против окружающей среды, состоит из двух частей:

работы против объемных сил (т. е. гравитации);

работы против поверхностных сил (т. е. давления и сил вязкости).

Напомним, что (работа) = (сила) $\times$ (путь в направлении действия силы), поэтому (скорость производства работы) = (сила) $\times$ (скорость в направлении действия силы).

Скорость производства работы против трех компонентов гравитационной силы на единицу массы элемента равна

$$-\rho \Delta x \Delta y \Delta z (w_x g_x + w_y g_y + w_z g_z). \quad (\text{II-42})$$

Знак минус в (II-42) стоит потому, что работа произведена против сил гравитации, т. е. $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$ направлены в противоположные стороны.

Скорость производства работы против статического давления p , приложенного к шести граням элемента $\Delta x \Delta y \Delta z$, равна

$$\begin{aligned} & \Delta y \Delta z \{ (p w_x)|_{x+\Delta x} - (p w_x)|_x \} + \Delta x \Delta z \{ (p w_y)|_{y+\Delta y} - (p w_y)|_y \} + \\ & + \Delta x \Delta y \{ (p w_z)|_{z+\Delta z} - (p w_z)|_z \}. \end{aligned} \quad (\text{II-43})$$

Таким же образом найдем скорость производства работы против сил вязкости

$$\begin{aligned} \Delta y \Delta z \{(\tau_{xx} w_x + \tau_{xy} w_y + \tau_{xz} w_z)|_{x+\Delta x} - (\tau_{xx} w_x + \tau_{xy} w_y + \tau_{xz} w_z)|_x\} + \\ + \Delta x \Delta z \{(\tau_{yx} w_x + \tau_{yy} w_y + \tau_{yz} w_z)|_{y+\Delta y} - (\tau_{yx} w_x + \tau_{yy} w_y + \tau_{yz} w_z)|_y\} + \\ + \Delta x \Delta y \{(\tau_{zx} w_x + \tau_{zy} w_y + \tau_{zz} w_z)|_{z+\Delta z} - (\tau_{zx} w_x + \tau_{zy} w_y + \tau_{zz} w_z)|_z\}. \end{aligned} \quad (II-44)$$

Теперь подставим полученные выражения в уравнение (II-38) разделим все члены полученного уравнения на $\Delta x \Delta y \Delta z$ и перейдем к пределу при Δx , Δy и Δz , стремящихся к нулю, в результате получим уравнение энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} w_x \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) + \right. \\ + \frac{\partial}{\partial y} w_y \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} w_z \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho w^2 \right) \Big] - \\ - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (w_x g_x + w_y g_y + w_z g_z) - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho w_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho w_z \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} w_x + \tau_{xy} w_y + \tau_{xz} w_z) + \right. \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} w_x + \tau_{yy} w_y + \tau_{yz} w_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} w_x + \tau_{zy} w_y + \tau_{zz} w_z) \Big]. \end{aligned} \quad (II-45)$$

Это уравнение может быть написано в более компактной векторно-тензорной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) = - \left[\nabla \cdot \rho \mathbf{w} \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) \right] - (\nabla \cdot \mathbf{q}) + \\ + \rho (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot \rho \mathbf{w}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w}]) \end{aligned} \quad (II-46)$$

скорость приращения
энергии на единицу
объема

скорость подвода энер-
гии на единицу объема
посредством
конвекции

скорость подвода
энергии на еди-
ницу объема
посредством теп-
лопроводности

скорость произ-
водства работы
над жидкостью
на единицу
объема гравита-
ционными силами

скорость произ-
водства работы
над жидкостью
на единицу
объема силами
давления

скорость произ-
водства работы
над жидкостью
на единицу
объема силами
вязкости

Преобразуем уравнение энергии с помощью уравнений сплошности и движения. Эту операцию произведем таким же образом, как это было сделано при переходе от формы уравнения движения (II-12) к форме (II-16) с помощью уравнения сплошности.

Произведем дифференцирование, указанное в левой части уравнения (II-46), перенесем туда конвективный член и после перегруппировки получим

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) + \left[\mathbf{w} \cdot \nabla \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) \right] \right\} + \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) \times \\ \times \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{w}) \right] = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot \rho \mathbf{w}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w}]). \end{aligned} \quad (II-47)$$

Первый член в левой части уравнения (II-47) представляет собой субстанциальную производную от $(u + \frac{1}{2} w^2)$; второй равен нулю на основании уравнения сплошности (II-4)

Перепишем уравнение (II-47) с учетом сказанного

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot \rho \mathbf{w}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w}]). \quad (II-48)$$

Отметим, что полученные здесь две формы уравнения энергии (II-46) и (II-48) корреспондируются с ранее полученными двумя формами уравнения сплошности (II-4) и (II-6) и двумя формами уравнения движения (II-15) и (II-17).

Уравнение (II-46) описывает энергетический обмен в жидкости с точки зрения неподвижного наблюдателя, а (II-48) описывает этот обмен, как его наблюдал бы исследователь,двигающийся вместе с потоком.

Уравнение (II-48) есть уравнение обмена, написанное для суммы $u + \frac{1}{2} w^2$.

Уравнение переноса для одного из слагаемых этой суммы было получено ранее (II-33). Перепишем его в следующей форме:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} w^2 \right) = \rho (\nabla \cdot \mathbf{w}) - (\nabla \cdot \rho \mathbf{w}) + \rho (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w}]) + (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{w}). \quad (II-49)$$

Вычитая уравнение (II-49) из (II-48), получим уравнение обмена для внутренней энергии u в виде

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \rho (\nabla \cdot \mathbf{w}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{w}). \quad (II-50)$$

скорость накоп-
ления внутрен-
ней энергии на
единицу
объема

скорость под-
вода внутренней
энергии посред-
ством теплопро-
водности на
единицу
объема

скорость возра-
стания внут-
ренней энергии
при обратимом
сжатии на
единицу
объема

скорость воз-
растания внут-
ренней энергии
за счет необра-
тимой дисси-
пации на
единицу
объема

Уравнение (II-50) называют уравнением тепловой энергии, или просто уравнением энергии.

Представим член $\rho \frac{Du}{Dt}$ в форме $\rho c_v \frac{DT}{Dt}$,

где c_v — теплоемкость в процессе постоянного объема на единицу массы;

член $\nabla \cdot \mathbf{g}$ в форме

$$\frac{\partial}{\partial x} q_x + \frac{\partial}{\partial y} q_y + \frac{\partial}{\partial z} q_z,$$

где $q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, $q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$, $q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$; член $(\tau : \nabla \mathbf{w})$ по уравнению (II-35).

С учетом сказанного уравнение (II-50) можно представить в следующей форме:

$$\rho c_v \frac{DT}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \mu \Phi_w. \quad (\text{II-51})$$

Большое значение имеют частные случаи уравнения (II-51). Например, для случая, когда коэффициент теплопроводности λ не зависит от температуры и $\rho = \text{const}$ ($\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$) уравнение (II-51) примет вид

$$\rho c_v \frac{DT}{D\tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi_w; \quad (\text{II-52})$$

для идеального сжимаемого газа

$$\rho c_v \frac{DT}{D\tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - p(\nabla \cdot \mathbf{w}); \quad (\text{II-53})$$

для твердого тела $\mathbf{w} = 0$, поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (\text{II-54})$$

где $a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$ — коэффициент температуропроводности; $c_v = c_p = c$, c — теплоемкость твердого тела.

Или иначе

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T. \quad (\text{II-55})$$

Уравнение (II-55) называют уравнением теплопроводности Фурье.

Для случая, когда температура во времени не изменяется, уравнение (II-54) примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II-56})$$

или

$$\nabla^2 T = 0. \quad (\text{II-57})$$

Последнее уравнение называют уравнением Лапласа.

§ 5. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Основные дифференциальные уравнения сплошности (II-3), движения (II-12, II-13 и II-14) и энергии (II-51) выражают собой фундаментальные законы сохранения массы импульса (количества движения) и энергии. Кроме того, эти уравнения содержат подтверждаемые экспериментом гипотезы — закон вязкого трения Ньютона и закон Фурье.

Общие решения перечисленных уравнений в частных производных не представляют физического решения. Для решения конкретных гидродинамических и тепловых задач следует сформулировать краевую задачу для указанных уравнений, т. е. задать краевые условия или условия однозначности. Задание краевых условий заключается в формулировке, во-первых, начальных условий, т. е. задании значений искомых функций в указанных уравнениях в начальный момент времени, который обычно принимается за $\tau = 0$, и, во-вторых, граничных условий, которые задаются на поверхностях, ограничивающих движущуюся жидкость. Для скорости вязкой жидкости такими условиями будет, как известно, равенство нулю скорости жидкости на неподвижных поверхностях твердых тел, с которыми соприкасается движущаяся жидкость, т. е. $\mathbf{w} = 0$. В случае движущегося твердого тела скорость жидкости у этой поверхности должна быть, очевидно, равна скорости поверхности. Эти условия «прилипания» вязкой жидкости являются следствием того, что между поверхностью твердого тела и всякой реальной жидкостью всегда существуют силы молекулярного сцепления, в результате чего непосредственно прилегающий к твердой стенке слой жидкости полностью задерживается, как бы прилипая к стенке*.

Что касается уравнения энергии, то для искомой функции — температуры могут быть заданы следующие граничные условия:

1. Граничные условия первого рода, когда задают значения температуры на ограничивающих жидкость поверхностях. В общем случае температура на границе может зависеть от координат точек границы и времени;

2. Граничные условия второго рода, когда на поверхности задана плотность теплового потока, т. е. производная от температуры по нормали к поверхности (в виде функции времени и координат точек поверхности);

3. Граничные условия третьего рода, в которых тепловой поток предполагается пропорциональным разности температур стенки и жидкости

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{п}} = \alpha (T_{\text{гр}} - T_f). \quad (\text{II-58})$$

В этом условии должен быть задан коэффициент теплоотдачи α , а также температура среды T_f .

* Отклонения от этих условий наблюдаются в разреженных газах, где приходится учитывать скольжение жидкости у поверхности.

4. Граничные условия четвертого рода, которые сводятся к одновременно заданию равенства температур и тепловых потоков на границе раздела, когда решается задача о теплообмене двух сред (твердое тело — жидкость, тело — тело, жидкость — жидкость), в каждой из которых перенос теплоты описывается своим уравнением энергии

$$T_1|_{\text{гр}} = T_2|_{\text{гр}}; \quad (\text{II-59})$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\text{гр}} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\text{гр}}. \quad (\text{II-60})$$

Эти условия допускают различные модификации в зависимости от физических условий на границе раздела сред. Так, например, если контакт между двумя твердыми телами не является идеальным, то условие (II-59) может содержать скачок температур. Если на границе раздела имеются источники (стоки) теплоты (химическая реакция, фазовый переход), то в условие (II-60) следует включить тепловой поток, возникающий в результате наличия поверхностного источника.

Некоторые физически важные граничные условия не входят в приведенную классификацию граничных условий. Так, например, при теплообмене излучением тепловой поток оказывается пропорциональным разности четвертых степеней температур стенки и газа.

В заключение следует отметить одно весьма важное обстоятельство. Именно через граничные условия течение жидкости зависит от формы и размеров (диаметр трубы, толщина пластины и т. д.) твердого тела, которое взаимодействует с потоком.

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для исследования процессов переноса теплоты в общем случае используют систему уравнений сплошности (II-3), движения (II-12, II-13 и II-14), состояния (II-37) и энергии (II-51). Рассмотрим некоторые особенности этой системы.

В основе уравнений сплошности, движения и энергии лежат простые физические законы — сохранения массы, сохранения количества движения, сохранения энергии. Однако уравнения получились очень сложными, включая дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных (II-12, II-13 и II-14). Это произошло в результате перехода от сложных величин таких, как работа, теплота, энергия к первоначальным величинам.

Первоначальными величинами [21] называют *простые, непосредственно наблюдаемые и измеряемые величины*, такие, как *линейный размер, промежуток времени, скорость, температура, физические константы* и т. п.

Переход к первоначальным величинам необходим; только при этом уравнения (II-3), (II-12, II-13 и II-14) и (II-51) превращаются в единую систему, так как содержащиеся в них различные законы оказываются выраженными через одни и те же переменные.

Система уравнений сплошности, движения, энергии и состояния описывает класс явлений — процессы обмена теплотой между твердым телом и жидкостью (теплоотдачу). Эта система из шести уравнений содержит шесть неизвестных $w_x, w_y, w_z, p, \rho, T$ и является замкнутой. Входящие в эти уравнения физические константы μ, λ, c должны быть заданы в условии задачи.

Из класса явлений можно выделить единичный случай, если присовокупить к системе уравнений краевые условия. Система уравнений и краевые условия составляют содержание задачи.

Краевые условия должны содержать совокупность значений искомых переменных во всех точках исследуемой области в начальный момент и в течение всего процесса на границах данной области. Следовательно, содержание задачи можно представить в следующей форме: система уравнений плюс совокупность значений постоянных параметров. Значит аргументами задачи наряду с независимыми переменными являются параметры.

Зависимость между искомыми величинами и независимыми переменными всегда содержит параметры. Последние показывают, как данная система — ее форма, геометрические размеры, физические константы и т. п. — влияет на протекание процесса.

Теперь можно пояснить, почему уравнения, описывающие процесс и составленные из первоначальных величин, считаются сложными. Дело в том, что эти уравнения содержат большое число параметров, которые входят в них в качестве аргументов. Поэтому при исследовании конкретного явления бывает трудно проследить, как отдельные аргументы влияют на искомую величину. Метод обобщенных координат помогает в некоторой степени преодолеть эти трудности.

Перейдем к его изложению.

§ 1. СОДЕРЖАНИЕ МЕТОДА

При аналитическом решении какой-либо задачи искомая величина представляется как однозначная функция аргументов. К аргументам относятся не только независимые переменные, но и параметры системы. **П а р а м е т р ы** — это величины, которые имеют постоянное значение для данного случая и принимают другие значения для других случаев [21].

Например, мы хотим найти распределение температуры в твердом теле. В общем случае температура будет функцией координат и времени (II-51). Значит решение нужно искать в виде функции температуры от координат и времени. Однако в чистом виде такую функцию найти невозможно, в нее войдут параметры. На распределение температуры в данном твердом теле будут влиять процессы, происходящие на его границах и в самом теле. В качестве параметров в данном случае будут выступать следующие величины: коэффициент теплоотдачи α , физические константы твердого тела в форме коэффициента теплопроводности a , геометрические размеры тела и для периодического процесса время периода τ_0 .

Таким образом, осуществляя переход к первоначальным переменным, мы вынуждены ввести в условие задачи большое количество аргументов (независимых переменных величин и параметров). Если систему (II-3, II-12, II-13, II-14, II-37 и II-51) уравнений и краевых условий удастся решить аналитически, то легко установить влияние всех аргументов на развитие исследуемого процесса и связь между искомой величиной и всеми аргументами (независимыми переменными и параметрами). Однако решить аналитически эту систему удастся только в очень редких случаях и только при значительных упрощениях. Результаты решения, как правило, практической ценности не имеют. Поэтому такие задачи решаются либо численным методом, либо экспериментально. Численное решение представляется в виде таблицы цифр, по которой трудно установить влияние отдельных аргументов (независимых переменных и параметров) на развитие всего процесса или влияния одних величин на другие.

При экспериментальном решении задачи удастся найти только частные зависимости искомой величины от отдельных аргументов.

Численный и экспериментальный методы позволяют найти решения для одного конкретного случая при фиксированных значениях параметров. При изменении хотя бы одного параметра все решение необходимо проделать заново.

Для того чтобы придать результатам численного или экспериментального решений обобщенный характер, т. е. сделать решение пригодным не только для одного конкретного явления, но и для группы подобных явлений и для уменьшения числа параметров задачи — применяют метод обобщенных переменных. Этим и ограничиваются возможности названного метода.

Содержание метода обобщенных переменных состоит в замене отдельных параметров задачи, представленных первоначальными величинами, комплексами, составленными из нескольких первоначальных величин, заданных по условию.

Такие комплексы начинают играть роль новых параметров-комплексов, а переменные величины вводятся в виде отношения текущих значений к значениям, заданным по условию.

§ 2. ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Структура параметров-комплексов зависит от уравнений, описывающих изучаемый процесс. На примере уравнения, описывающего теплопроводность в твердом теле (II-54), рассмотрим способ составления комплексов.

Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

или в другой форме

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T.$$

Члены уравнения представляют собой выражения, составленные из первоначальных величин, связанных дифференциальными операторами, и описывают физические эффекты, присущие процессу нестационарной теплопроводности*.

Если соединить выражения для отдельных физических эффектов в отношения, то оказывается, что влияние таких отношений на характер протекания процесса выступает более наглядно, чем влияние этих же двух эффектов, взятых порознь. Структура таких отношений служит основой для составления комплексов. Уравнение (II-54) не содержит сведений о взаимодействии тела с окружающей средой. В то же время теплообмен тела с окружающей средой окажет влияние на формирование его температурного поля. Поэтому уравнение следует дополнить краевыми условиями. Обычно в задачах о теплообмене среды с твердым телом бывает задана температура среды. В этом случае вы-

* С методом определения структуры параметров-комплексов для других уравнений теплообмена можно познакомиться в специальной литературе [21, 22].

бирают граничные условия третьего рода (гл. II, § 5) в форме уравнения (II-58)

$$\alpha \Delta T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n},$$

где $\Delta T = T_w - T_f$ — температурный напор;

T_w — температура поверхности тела;

T_f — температура среды.

Итак, уравнение (II-54) и граничное условие (II-58) составляют содержание задачи о нестационарной теплопроводности твердого тела. Аналитическое решение этой задачи приводится в главе IV. Здесь мы только рассмотрим способ составления комплексов и формы, в какой следует представить решение с тем, чтобы оно имело обобщенный характер.

Из уравнений (II-54) и (II-58) видно, что не абсолютные температуры, а разности температур оказывают влияние на формирование температурного поля. Поэтому целесообразно в этих уравнениях заменить абсолютные температуры избыточными. Если какую-либо температуру, заданную по условию задачи и характерную для нее, принять за начало отсчета, то все температурные разности можно представить как избыточные температуры, например,

$$\vartheta = T - T',$$

где T' — характерная для данной задачи температура, принятая за начало отсчета;

ϑ — избыточная температура; она может быть положительной или отрицательной.

Условие задачи (II-54), (II-58) в избыточных температурах будет иметь вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \nabla^2 \vartheta; \quad (\text{III-1})$$

$$\alpha \Delta \vartheta = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n}. \quad (\text{III-2})$$

Выше отмечалось, что на характер протекания процесса оказывает влияние относительная интенсивность физических эффектов. Из членов уравнения (III-1) можно составить следующее отношение:

$$\frac{a \nabla^2 \vartheta}{\frac{\partial \vartheta}{\partial n}}, \quad (\text{III-3})$$

которое называют относительным дифференциальным оператором.

Дифференциальные операторы в числителе и знаменателе (III-3) состоят из зависимых ϑ и независимых x, y, z, τ переменных величин и сами являются переменными. Операторы изменяются при изменении независимых переменных. Они не только группируют определенным образом первоначальные величины, но и указывают действия, которые над ними следует произвести. Для заданных значений независи-

мых переменных они становятся постоянными. Для фиксированной точки пространства в заданный момент времени числитель и знаменатель (III-3) будут иметь определенные значения, а само отношение (III-3) будет представлять собой относительную интенсивность физических эффектов.

Относительная интенсивность определяет характер протекания процесса. Мы ищем комплекс, который в качестве постоянного параметра так же должен определять характер протекания конкретного процесса, следовательно, он должен быть составлен из тех же величин, что и относительный оператор, но из постоянных и заданных по условию. Перевод оператора в комплекс называют приведением [21].

Произведем приведение относительного дифференциального оператора (III-3) в относительный комплекс. Проведем эту операцию по частям — отдельно для знаменателя и числителя.

Рассмотрим вначале операцию приведения производной произвольного порядка m , т. е. для $\frac{d^m y}{dx^m}$. Пусть $y = f(x)$ (реальный закон распределения) — любая функция, тогда рассматриваемую производную можно представить в следующей форме:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = n(x) \frac{y_0}{x_0^m}, \quad (\text{III-4})$$

где множитель n — некоторая функция x , а y_0 и x_0 — параметры, заданные по условию задачи. Если функция f зависит от двух или более переменных, то (III-4) сохраняет силу, но при этом множитель будет функцией тех же двух или более переменных.

Чтобы пояснить (III-4), сделаем следующую операцию. Введем новую показательную функцию $y' = ax'^m$ (фиктивный закон распределения), производная от которой будет постоянной. Величина a выбирается так, чтобы выполнялось условие при $x'_0 = x_0$, должно быть $y'_0 = y_0$; отсчет переменных ведется от начала интервала $x'_0 = x_0$, $y'_0 = y_0$, как от нуля. Производная от показательной функции равна

$$\frac{d^m y'}{dx'^m} = m! a, \quad \text{где } a = \frac{y'_0}{x_0'^m} = \frac{y_0}{x_0^m}.$$

Поэтому

$$\frac{d^m y'}{dx'^m} = m! \frac{y_0}{x_0^m}. \quad (\text{III-4a})$$

Из (III-4a) видно, что производная от показательной функции (фиктивный закон распределения) имеет постоянное значение, которое может быть определено по условию задачи (x_0, y_0).

Сравнивая уравнения (III-4) и (III-4a), устанавливаем, что производная от фиктивного распределения определяет порядок производной от реального распределения. Истинное значение последней определяется из выражения (III-4). От последнего выражения можно перейти к выражению (III-4), заменив постоянный множитель $m!$ на переменный n , являющийся функцией x , причем $m!$ включен в $n(x)$.

Смысл множителя $n(x)$ можно выяснить из выражения (III-4), если представить его в форме

$$n(x) = \frac{d^m \left(\frac{y}{y_0} \right)}{d \left(\frac{x}{x_0} \right)^m}. \quad (\text{III-5})$$

Он представляет собой рассматриваемую производную, приведенную к безразмерной форме. Множитель $n(x)$ зависит от закона безразмерного распределения

$$Y = f(X),$$

где

$$X = \frac{x}{x_0}; \quad Y = \frac{y}{y_0},$$

но не зависит от абсолютных значений переменных и параметров.

Операция приведения (замещения производной соответствующим комплексом) рассматриваемой производной будет выглядеть так:

$$\frac{d^m y}{dx^m} \rightarrow \frac{y_0}{x_0^m}. \quad (\text{III-6})$$

Теперь сделаем приведение для относительного оператора (III-3) применительно к одномерному случаю*, т. е. когда

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

соответствии с (III-4) для числителя (III-3) получим

$$a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = n_1(x) a \frac{\vartheta_0}{x_0^2}$$

или в соответствии с (III-6)

$$a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \rightarrow a \frac{\vartheta_0}{l^2}.$$

Аналогично для знаменателя (III-3) получим

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = n_2(\tau) \frac{\vartheta_0}{\tau_0}$$

* Доказано [21], что дифференциальный оператор для трехмерного случая приводится так же, как и для одномерного случая, к виду

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \rightarrow \frac{\vartheta_0}{l^2}$$

или

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \rightarrow \frac{1}{l^2}.$$

или

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \rightarrow \frac{\vartheta_0}{\tau_0}.$$

И, наконец, для оператора (III-3) в целом имеем

$$a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{n_1(x)}{n_2(\tau)} \cdot \frac{a \frac{\vartheta_0}{x_0^2}}{\frac{\vartheta_0}{\tau_0}} = N(x, \tau) \frac{a \tau_0}{x_0^2} \quad (\text{III-7})$$

или

$$a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \rightarrow \frac{a \tau_0}{l^2}, \quad (\text{III-8})$$

где ϑ_0 — характерная температура;

x_0 — геометрический размер твердого тела в направлении изменения температуры;

l — характерный геометрический размер твердого тела;

τ_0 — характерный промежуток времени, например, время периода для периодического процесса.

Величины ϑ_0 , x_0 , l , τ_0 являются параметрами и должны быть заданы по условию задачи:

$$N(x, \tau) = \frac{a \frac{\partial^2 \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{x_0} \right)^2}}{\frac{\partial \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)}{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}}$$

— множитель (III-7) в данном случае выступает как функция двух независимых переменных: координаты x и времени τ .

Левая часть уравнений (III-7, III-8) представляет собой отношение интенсивности двух физических эффектов — изменения температуры в твердом теле вдоль оси x (одномерный случай) к изменению температуры по времени в каждой точке на оси x .

Влияние такого отношения на характер протекания процесса формирования температурного поля в твердом теле выступает более наглядно, чем влияние числителя и знаменателя, взятых порознь, поэтому его (отношение) принимают за количественную характеристику процесса. А если это так, то за аргумент следует принять комплекс $\frac{a \tau_0}{l^2}$ (III-8) и переменные величины вводить в форме отношений их

текущих значений к некоторым постоянным значениям, заданным по условию задачи, так как множитель $N(x, \tau)$ (III-7) зависит от распределения таких отношений $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}; \frac{x}{x_0}; \frac{\tau}{\tau_0}$ (относительных или безразмерных переменных).

Полученный комплекс называют критерием Фурье и обозначают

$$\frac{a\tau_0}{l^2} \equiv Fo. \quad (III-9)$$

Очевидно, что оба члена уравнения (III-1) имеют одинаковую размерность, поэтому критерий Фурье — величина безразмерная. Относительные критерии, получаемые в результате описанной выше операции приведения из любых дифференциальных уравнений, всегда будут безразмерными величинами.

Операция приведения для уравнения (III-2) будет выглядеть так:

$$\frac{\alpha \Delta \vartheta}{\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n}} \rightarrow \frac{\alpha \vartheta_0}{\lambda \frac{\vartheta_0}{l}} = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (III-10)$$

полученный комплекс называют критерием Био и обозначают

$$\frac{\alpha l}{\lambda} \equiv Bi. \quad (III-11)$$

На основании (III-7), (III-8) и (III-10) можно рассматривать критерии Фурье (III-9) и Био (III-11) как некоторую *среднюю меру отношения* интенсивности двух физических эффектов, существенных для процесса теплопроводности.

Для других процессов теплообмена получены свои критерии, но их также можно рассматривать как среднюю меру отношения физических эффектов, существенных для соответствующих процессов переноса теплоты.

§ 3. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теплопроводность

Доказано [21], что решение задачи о теплопроводности в твердом теле для нестационарного периодического процесса при заданных значениях критериев Фурье Fo и Био Bi и распределения относительных переменных величин (если необходимо) в начальный момент и на границах тела можно найти в форме следующей однозначной зависимости*:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f\left(\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, Fo, Bi\right), \quad (III-12)$$

где $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ — искомая переменная — температура в относительной форме;

$\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}$ — независимые переменные — время и координаты в относительной форме.

Величины ϑ_0, τ_0, l_0 задаются по условию задачи.

Покажем, что решение (III-12) имеет обобщенный характер. Существует бесчисленное количество каждой из первоначальных величин $a = \frac{\lambda}{c\rho}, \tau_0, l$, которые при объединении в критерий Фурье дадут одно и то же число. Все это справедливо и для критерия Био. Но каждый набор из первоначальных величин $a = \frac{\lambda}{c\rho}, \tau_0, l$ соответствует конкретному единичному случаю. Следовательно, решение в форме (III-12) остается справедливым для бесчисленного количества тех единичных случаев, у которых как критерий Фурье, так и критерий Био одинаковы. Значит решение (III-12) имеет обобщенный характер, а все единичные случаи, для которых это решение оказывается справедливым, родственны между собой. Это объясняется тем, что соотношения между основными физическими эффектами во всех случаях одинаковы, так как для них одинаковы критерии Фурье и Био, а крайние условия подобны между собой. Явления, между которыми наблюдается такое соответствие, физически подобны. Группа единичных случаев, у которых критерии (например, Фурье и Био) одинаковы по величине, — составляет *обобщенный индивидуальный случай*.

Единичные случаи, составляющие обобщенный индивидуальный случай, подобны между собой.

Конкретные значения критериев подобия (и если необходимо — относительное распределение переменных величин в начальный момент и на границах системы), присоединенные к соответствующим дифференциальным уравнениям, описывающим класс явлений (например, явления теплопроводности в твердом теле), выделяют из него (класса) обобщенный индивидуальный случай и, следовательно, могут рассматриваться как обобщенная форма крайних условий.

Следовательно, количественным признаком подобия является одинаковость критериев (например, Фурье и Био), составленных только из заданных параметров математического описания процесса, поэтому их называют критериями подобия.

Заклучение о равенстве критериев подобия для подобных между собой процессов теплопроводности, описанных тождественными уравнениями, остается справедливым для любых явлений теплообмена.

Итак, необходимым и достаточным условием подобия двух или более процессов теплообмена является равенство в них одноименных критериев подобия [21].

Иногда в условии задачи бывают даны не один, а два или более параметров одной физической природы. Например, если дано два ха-

* Результаты эксперимента также целесообразно представить в форме выражения (III-12).

рактрных геометрических размера, то получится два критерия Фурье

$$Fo_1 \equiv \frac{a\tau_0}{l_1^2} \text{ и } Fo_2 \equiv \frac{a\tau_0}{l_2^2},$$

отличающихся только характерными размерами.

Комбинируя их в отношение, получим

$$\frac{a\tau_0}{l_1^2} : \frac{a\tau_0}{l_2^2} = \frac{l_2^2}{l_1^2}.$$

Такое отношение называют параметрическим критерием и обозначают

$$\frac{l_2^2}{l_1^2} = P_1.$$

Все сказанное в равной мере относится и к критерию Био. При таком условии задачи в выражении (III-12) оставляют по одному однотипному критерию (например, Fo_1) и одновременно вводят параметрические критерии. В этом случае зависимость (III-12) имеет вид

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = f\left(\frac{\tau}{\tau_0}; \frac{x}{l}; \frac{y}{l}; Fo; Bi; P_1; P_2; \dots\right). \quad (III-13)$$

Очевидно, что рассмотренные параметрические критерии являются критериями геометрического подобия.

Для стационарного одномерного процесса теплопроводности уравнение (III-13) значительно упрощается

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = f\left(\frac{x}{l}; Bi; P_1; P_2; \dots\right) \quad (III-13a)$$

Бывают случаи, когда по условию задачи не задано ни одного параметра данной физической природы. Например, нестационарный аperiodический процесс теплопроводности в твердом теле. Действительно, в этой задаче не задано никакого отрезка времени τ_0 , и мы не можем составить критерий Фурье. В таких задачах комбинируют критерий и соответствующую относительную переменную так, чтобы исключить незаданный параметр [21]. В нашем случае эта операция будет выглядеть так:

$$\frac{a\tau_0}{l^2} \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{a\tau}{l^2}. \quad (III-14)$$

Полученный комплекс называется безразмерной переменной комплексного типа, или относительной формой текущего времени.

Этот комплекс по форме не отличается от критерия Фурье, но по существу он не является критерием подобия. Комплекс $\frac{a\tau}{l^2}$ в отличие от критерия Фурье $\frac{a\tau_0}{l^2}$ называют числом Фурье.

Зависимость (III-12) для случая нестационарного аperiodического одномерного* процесса имеет вид

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = f\left(Bi; \frac{a\tau}{l^2}; \frac{x}{l}\right). \quad (III-15)$$

В случае одномерного процесса параметрические критерии, составленные из характерных размеров, отпадают, так как изменение температуры происходит только в направлении одной координаты (например, x) и выбирается только один характерный размер l .

Теплоотдача

Процесс переноса теплоты в несжимаемой жидкости описывается системой уравнений сплошности (II-7), движения (II-28) и энергии (II-52). Из этих уравнений могут быть получены безразмерные комплексы. Левая часть уравнения (II-7) представляет собой однородный дифференциальный оператор и из него (уравнения) нельзя получить никакого безразмерного комплекса.

Рассмотрим уравнение движения (II-28). В нем субстанциальная производная

$$\frac{Dw}{Dt} \equiv \frac{\partial w}{\partial \tau} + (w \text{ grad}) w$$

отражает нестационарность процесса и из нее может быть получен комплекс вида

$$\frac{(w \text{ grad}) w}{\frac{\partial w}{\partial \tau}} \rightarrow \frac{w_0 \frac{w_0}{l}}{\frac{w_0}{\tau_0}} = \frac{w_0 \tau_0}{l},$$

который называют критерием гомохронности и обозначают

$$\frac{w_0 \tau_0}{l} \equiv Ho. \quad (III-16)$$

Здесь τ_0 — время периода.

Для аperiodического процесса получим соответственно комплекс вида

$$\frac{w_0 \tau}{l},$$

который имеет смысл безразмерного времени, так же, например, как число Фурье (III-14).

* Здесь и в дальнейшем будут рассматриваться только одномерные случаи нестационарных процессов. Такие случаи часто встречаются на практике и многие конкретные задачи могут быть решены аналитически (гл. V).

Полученный комплекс называют ч и с л о м С т р у х а л я и обозначают

$$\frac{\omega_0 \tau}{l} \equiv \text{Sh}. \quad (\text{III-17})$$

Теперь рассмотрим уравнение движения (II-28). Для стационарного процесса ($\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} = 0$) представим его в виде

$$\rho (\mathbf{w} \text{ grad}) \mathbf{w} - \rho \mathbf{g} + \text{grad } p - \mu \nabla^2 \mathbf{w} = 0.$$

В левую часть уравнения входят четыре однородных дифференциальных оператора, следовательно, можно получить три следующих комплекса:

$$\text{I.} \quad \frac{\rho (\mathbf{w} \text{ grad}) \mathbf{w}}{\mu \nabla^2 \mathbf{w}} \rightarrow \frac{\rho \omega_0 \frac{\omega_0}{l}}{\mu \frac{\omega_0}{l^2}} = \frac{\omega_0 l}{\nu}.$$

Полученный комплекс представляет собой среднюю меру отношения сил инерции к силам трения; его называют к р и т е р и е м Р е й н о л ь д с а и обозначают

$$\frac{\omega_0 l}{\nu} \equiv \text{Re}. \quad (\text{III-18})$$

$$\text{II.} \quad \frac{\rho (\mathbf{w} \text{ grad}) \mathbf{w}}{\rho \mathbf{g}} \rightarrow \frac{\omega_0 \frac{\omega_0}{l}}{g} = \frac{\omega_0^2}{gl}.$$

Полученный комплекс представляет собой среднюю меру отношения сил инерции к силам тяжести; его называют к р и т е р и е м Ф р у д а и обозначают

$$\frac{\omega_0^2}{gl} \equiv \text{Fr}. \quad (\text{III-19})$$

$$\text{III.} \quad \frac{\text{grad } p}{\rho (\mathbf{w} \text{ grad}) \mathbf{w}} \rightarrow \frac{\frac{\Delta p}{l}}{\frac{\rho \omega_0^2}{l}} = \frac{\Delta p}{\rho \omega_0^2 l}.$$

Полученный комплекс имеет смысл безразмерной неизвестной переменной Δp ; его называют ч и с л о м Э й л е р а и обозначают

$$\frac{\Delta p}{\rho \omega_0^2 l} \equiv \text{Eu}. \quad (\text{III-20})$$

Распределение давления в исследуемом потоке является следствием физической обстановки, которая сложилась при движении жидкости, поэтому перепад давления Δp является величиной искомой, а не заданной.

Теперь рассмотрим уравнение энергии (II-52). Для стационарного процесса ($\partial T / \partial \tau = 0$) в несжимаемой жидкости ($\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$) при умеренных скоростях ($\mu \Phi = 0$); представим его в виде

$$\mathbf{w} \text{ grad } T - a \nabla^2 T = 0.$$

В левую часть уравнения входят два однородных дифференциальных оператора, следовательно, из него можно получить один безразмерный комплекс вида

$$\frac{\mathbf{w} \text{ grad } T}{a \nabla^2 T} \rightarrow \frac{\omega_0 \frac{T_0}{l}}{a \frac{T_0}{l^2}} = \frac{\omega_0 l}{a}. \quad (\text{III-21})$$

Полученный комплекс называют к р и т е р и е м П е к л е и обозначают

$$\frac{\omega_0 l}{a} \equiv \text{Pe}. \quad (\text{III-22})$$

Представим (III-21) в виде

$$\frac{\rho c_p \mathbf{w} \text{ grad } T}{\lambda \nabla^2 T} \rightarrow \frac{\omega_0 l}{a}. \quad (\text{III-21a})$$

Критерий Пекле (III-22) представляет собой среднюю меру отношения интенсивности переноса теплоты конвекцией к интенсивности переноса теплоты теплопроводностью.

Комбинируя критерий Рейнольдса и Пекле в отношение, получим новый комплекс

$$\frac{\text{Pe}}{\text{Re}} = \frac{\frac{\omega_0 l}{a}}{\frac{\omega_0 l}{\nu}} = \frac{\nu}{a},$$

который называют к р и т е р и е м П р а н д т л я и обозначают

$$\frac{\nu}{a} \equiv \text{Pr}. \quad (\text{III-23})$$

Критерий Прандтля представляет собой отношение двух физических констант и сам является физической константой.

Критерий подобия для свободной конвекции

Комбинируя критерии Рейнольдса и Фруда, можно получить комплекс

$$\frac{Re^2}{Fr} \equiv \frac{gl^3}{v^2},$$

который называют критерием Галилея и обозначают

$$\frac{gl^3}{v^2} \equiv Ga. \quad (III-24)$$

Комбинируя полученный критерий Галилея с параметрическим критерием, характеризующим неоднородное поле плотности $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, получим комплекс

$$\frac{gl^3}{v^2} \frac{\Delta\rho}{\rho},$$

который называют критерием Архимеда и обозначают

$$\frac{gl^3}{v^2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \equiv Ar. \quad (III-25)$$

При свободной конвекции неоднородность поля плотности вызывается неоднородностью поля температуры. В этих условиях параметрический критерий $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ замещается выражением $\beta\Delta T$, где β — коэффициент объемного расширения. В результате получим комплекс

$$\frac{gl^3}{v^2} \beta\Delta T,$$

который называют критерием Грасгофа и обозначают

$$\frac{gl^3 \beta\Delta T}{v^2} \equiv Gr. \quad (III-26)$$

Получив комплексные аргументы-критерии, составим обобщенные уравнения для распределения температуры жидкости при теплообмене с твердым телом для следующих случаев:

а) стационарное вынужденное движение

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f_1\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, Re, Pr, P_1, P_2, \dots\right), \quad (III-27)$$

в (III-27) формально следовало бы ввести критерии Re и Fr , но этой паре критериев эквивалентна другая — Re и Pr , причем эта последняя оказывается удобнее при описании функции (III-27).

В уравнении (III-27) $\vartheta_0 = T_1 - T_0$, $\vartheta = T - T_0$; T_1 и T_0 — температуры жидкости, заданные по условию, T — искомая переменная;

б) стационарное свободное движение

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f_2\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, Gr, Pr, P_1, P_2, \dots\right); \quad (III-28)$$

при свободном движении поле скорости жидкости является следствием физической обстановки, сложившейся в результате неоднородности поля плотности, которая в свою очередь вызвана неоднородностью температурного поля. Поэтому скорость жидкости является величиной искомой, а не заданной, и критерии

$$Re = \frac{w_0 l}{v} \quad \text{и} \quad Fr = \frac{w_0 l}{a},$$

содержащие заданную по условию скорость w_0 , выпадают из уравнения (III-28).

Многие технические задачи сводятся к определению количества теплоты, которое переходит от жидкости к твердому телу или от твердого тела к жидкости. В этих случаях не требуется определять температурное поле (III-27), (III-28) жидкости. Достаточно определить коэффициент теплоотдачи α и по известному уравнению

$$q = \alpha\Delta T \quad (III-29)$$

можно найти тепловой поток q , так как температурный напор ΔT (абсолютное значение разности температур жидкости и поверхности твердого тела) либо задается, либо относительно легко определяется. В большинстве случаев коэффициент теплоотдачи α определяется экспериментально. Результаты эксперимента следует представлять в виде обобщенного уравнения. Такое уравнение можно получить, если подставить в левую часть уравнения (III-28) вместо отношения $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ безразмерный коэффициент теплоотдачи [21]. Этот коэффициент найдем из уравнения

$$\alpha\Delta T = \lambda \text{ grad } T, \quad (III-30)$$

где правая часть, так же как и левая (III-29), представляет собой тепловой поток к поверхности или от поверхности твердого тела. В тонком слое жидкости, у поверхности твердого тела, теплота передается теплопроводностью, поэтому для определения теплового потока можно применять закон Фурье (уравнение I-3). Из уравнения (III-30) можно получить только один комплекс

$$\frac{\alpha\Delta T}{\lambda \text{ grad } T} \rightarrow \frac{\alpha l}{\lambda},$$

который представляет собой безразмерный коэффициент теплоотдачи; его называют числом Нуссельта и обозначают

$$\frac{\alpha l}{\lambda} \equiv Nu. \quad (III-31)$$

Искомое обобщенное уравнение (III-27 и III-28) с учетом (III-31) имеет вид:

а) для вынужденного движения жидкости

$$Nu = F\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, Re, Pr, P_1, P_2, \dots\right); \quad (III-32)$$

б) для свободного движения жидкости

$$Nu = F_1\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, Gr, Pr, P_1, P_2, \dots\right). \quad (III-33)$$

В любом из приведенных случаев может быть вычислено среднее значение числа $\overline{Nu} = \frac{1}{F} \int NudF$, где F — поверхность, через которую происходит теплообмен.

§ 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделированием называется метод экспериментального изучения модели явления вместо натурального явления; модель выбирают так, чтобы результаты эксперимента можно было распространить на натурное явление.

Этот метод применяют в тех случаях, когда трудно или невозможно изучить натурное явление по техническим причинам, т. е. по недопустимой длительности изучения процесса или вследствие его чрезмерно высокой стоимости.

Ярким примером такого случая может служить создание тепловой защиты для космических летательных аппаратов. Такие аппараты при возвращении на Землю проходят плотные слои атмосферы с огромными скоростями (первой или второй космической) и температура воздуха между ударной волной и головной частью аппарата, т. е. в непосредственной близости от обшивки, достигает примерно 13 000°K.

Для того чтобы спасти аппарат от полного разрушения, необходимо было разработать тепловую защиту. Ясно, что эта задача предельно должна была быть решена на моделях в лабораторных условиях.

Моделирование как метод распадается на два самостоятельных этапа: первый — создание модели; второй — измерения и наблюдения на модели. Здесь будет рассмотрен только первый этап*.

Модель должна быть изготовлена так, чтобы процесс, протекающий в ней, был подобен натурному. Если это условие выполнено, то результаты исследования на модели можно распространить на натуральный объект.

Пусть задан процесс — стационарный вынужденный конвективный теплообмен каплевой жидкости со стенками круглой трубы

(натурный объект), т. е. заданы значения критериев подобия Рейнольдса $Re' = \frac{\omega'_0 l'}{v'}$ и Прандтля $Pr' = \frac{v'}{a'}$,

где ω'_0 — средняя скорость жидкости;

l' — характерный размер, в данном случае диаметр трубы d' ;
 v', a' — физические константы.

Для простоты будем считать, что условия входа жидкости в трубу не оказывают влияния на рассматриваемый процесс, а ее физические константы постоянны. Требуется экспериментально найти зависимость

$$Nu = f(Re, Pr), \quad (a)$$

пригодную для определения числа Нуссельта натурального объекта. Опыты провести на модели натурального объекта, уменьшенной по сравнению с ним, например в 10 раз.

Экспериментальная зависимость (a) будет пригодна для натурального объекта при условии, если процессы теплообмена (натурный и в модели) подобны. Процессы будут подобны, если модель геометрически подобна (имеются в виду только внутренние размеры канала, по которому движется жидкость, и его конфигурация) натурному объекту и критерии подобия модели и объекта равны между собой, т. е.

$$Re' = Re'' \text{ и } Pr' = Pr''. \quad (б)$$

Здесь и в дальнейшем индексом один штрих — отмечаются величины, относящиеся к натурному объекту, а индексом два штриха — к модели. Равенства (б) накладывают ограничения на произвольный выбор параметров модели.

Требование

$$Pr' = Pr'' \text{ или } \frac{K_v}{K_a} = 1 \quad \left(\text{здесь } K_v = \frac{v'}{v''}, \quad K_a = \frac{a'}{a''} \right)$$

приводит к тому, что в модели приходится, как правило, применять ту же жидкость, что и в натурном объекте.

Требование

$$Re' = Re'' \text{ и } \frac{K_w K_l}{K_v} = 1 \quad (в)$$

$$\left(\text{здесь } K_w = \frac{\omega'}{\omega''}, \quad K_l = \frac{l'}{l''} \right)$$

с учетом применения одной и той же жидкости в модели и натурном объекте, т. е. при $K_v = 1$, из соотношения (в) получим

$$K_w \cdot K_l = 1. \quad (г)$$

Ранее было принято

$$K_l = \frac{l'}{l''} = \frac{d'}{d''} = 10$$

* Способы измерения и наблюдения описаны в специальной литературе, например в книге Б. С. Петухова «Опытное изучение процессов теплопередачи», Госэнергоиздат, 1952.

(в данном примере, модель — круглая труба с диаметром $d'' = \frac{d'}{10}$), тогда из соотношения (г) следует:

$$K_w = \frac{\omega'_0}{\omega''_0} = \frac{1}{10} \quad \text{и} \quad \omega''_0 = 10 \omega'_0,$$

т. е. средняя скорость жидкости в модели ω''_0 должна быть в 10 раз больше средней скорости ω'_0 в самом натурном объекте. Это условие и является ограничительным при выборе параметров процесса в модели (модельного процесса).

При моделировании более сложных процессов возникают дополнительные ограничительные условия. Совокупность всех ограничительных условий создает большие трудности при практическом осуществлении модельного процесса. Во многих случаях трудности оказываются непреодолимыми, а точное моделирование невозможным. Поэтому прибегают к *приближенному* моделированию.

Приближенное моделирование

В различных условиях критерии подобия по-разному влияют на протекание изучаемых процессов. Если влияние какого-либо критерия проявляется слабо, то его можно исключить из условия задачи. Одновременно снимается ограничительное условие, которое порождал бы такой критерий при выборе параметров модельного процесса. Моделирование натурных процессов в тех случаях, когда отдельные критерии, слабо влияющие на их протекание, исключены из условия задачи, — называется *приближенным*.

Пусть моделируется стационарное поле величины ω . Тогда при точном моделировании в сходственных точках модели и натурального объекта должно соблюдаться условие

$$\omega'' = \frac{1}{K_\omega} \omega',$$

а в случае приближенного моделирования —

$$\omega'' = \frac{1}{K_\omega} \omega' + \Delta \omega''.$$

Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta \omega''}{\omega''}$$

называют *степенью искажения* [21].

Если степень искажения ε не превосходит точности измерения, то приближенное моделирование не отличается от точного. Нельзя заранее сделать так, чтобы величина ε не превышала некоторого наперед заданного значения, так как в большинстве случаев ее нельзя заранее даже определить.

Метод аналогий

До сих пор обобщенный индивидуальный случай рассматривался как группа подобных между собой единичных явлений одной физической природы. Если два физических явления различной физической природы описываются тождественными уравнениями и условиями однозначности, представленными в безразмерной форме, то они (явления) называются *аналогичными*. При этих же условиях явления одной физической природы называются *подобными*.

Несмотря на то что аналогичные явления имеют различную физическую природу, они относятся к одному индивидуальному обобщенному случаю. Это обстоятельство позволило создать весьма удобный *метод аналогий* для изучения физических явлений.

Сущность его состоит в следующем: исследованию подвергается не изучаемое явление, для которого трудно или невозможно произвести измерения искомых величин, а специально подобранное, аналогичное изучаемому, свободное от такого недостатка. В качестве примера рассмотрим электротепловую аналогию. В этом случае изучаемое явление — стационарное температурное поле, а его аналогия — стационарное поле электрического потенциала.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III-34})$$

и уравнение электрического потенциала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III-35})$$

аналогичны. В безразмерной форме эти уравнения будут тождественны.

Если созданы граничные условия для потенциала, аналогичные условиям для температуры, то в безразмерной форме они будут так же тождественны. [Граничные условия первого и второго рода (гл. II).]

Электротепловая аналогия широко используется при изучении процессов теплопроводности (гл. VI). Например, температурные поля лопаток газовых турбин были измерены этим методом.

§ 5. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Иногда приходится изучать процессы, которые еще не описаны дифференциальными уравнениями. Единственный путь изучения — эксперимент. Результаты эксперимента целесообразно (§ 2) представлять в обобщенной форме, но для этого нужно уметь находить безразмерные комплексы, характерные для такого процесса*.

Анализ размерностей — это *метод составления безразмерных комплексов в условиях, когда изучаемый процесс еще не описан дифференциальными уравнениями*.

* В § 2 настоящей главы изложен метод получения безразмерных комплексов из дифференциальных уравнений, описывающих изучаемый процесс.

Рассмотрим этот метод.

Все физические величины можно разделить на первичные и вторичные. Для процессов теплообмена за первичные обычно выбирают следующие: длину L , массу M , время τ , количество теплоты Q , температуру ϑ . Тогда вторичными будут такие, как коэффициент теплоотдачи α , коэффициент температуропроводности a и т. п.

Формулы размерности вторичных величин имеют вид степенных одночленов. Например, формула размерности для коэффициента теплоотдачи α имеет вид

$$[\alpha] = QL^{-2}\tau^{-1}\vartheta^{-1}. \quad (\text{III-36})^*$$

Пусть известны все физические величины, существенные для изучаемого процесса. Требуется найти безразмерные комплексы.

Составим произведение из формул размерностей всех существенных для процесса физических величин в некоторых неопределенных пока степенях; очевидно, оно будет степенным одночленом (для процесса). Предположим, что его размерность (степенного одночлена) равна нулю, т. е. показатели степеней первичных величин, входящих в формулу размерностей, сократились, тогда степенной одночлен (для процесса) можно представить в форме произведения безразмерных комплексов из размерных величин. Значит, если составить произведение из формул размерностей, существенных для процессов физических величин в неопределенных степенях, то из условия равенства нулю суммы показателей степеней первичных величин этого степенного одночлена можно определить искомые безразмерные комплексы**.

Покажем эту операцию на примере периодического процесса теплопроводности в твердом теле, омываемом жидким теплоносителем. Будем считать, что дифференциальные уравнения для рассматриваемого процесса не известны. Требуется найти безразмерные комплексы.

Существенными физическими величинами для изучаемого процесса будут следующие: характерный размер l [м], коэффициент теплопроводности твердого тела λ [ккал/м·сек·град], теплоемкости твердого тела c [ккал/кг·град], плотность твердого тела ρ [кг/м³], коэффициент теплоотдачи α [ккал/м²·сек·град], время периода τ_0 [сек], характерная избыточная температура ϑ [град].

Составим из этих величин степенной одночлен вида

$$l^a \lambda^b c^f \rho^i \alpha^k \tau_0^m \vartheta^n. \quad (\text{III-37})$$

Заменим в (III-37) физические величины их формулами размерности, в результате получим

$$\begin{aligned} L^a [QL^{-1}\tau^{-1}\vartheta^{-1}]^b [QM^{-1}\vartheta^{-1}]^f [ML^{-3}]^i [QL^{-2}\tau^{-1}\vartheta^{-1}]^k \tau_0^m \vartheta^n = \\ = L^{a-b-3i-2k} Q^{b+f+k} \tau^{-b-k+m} \vartheta^{-b-f-k+n} M^{-f+i}. \end{aligned} \quad (\text{III-38})$$

* Показатель степени при первичной величине называется размером по отношению вторичной величины в отношении данной первичной [21].

** Более подробно этот вопрос рассмотрен в [21].

Теперь приравняем нулю показатели степеней одночлена (III-38) для длины L

$$a - b - 3i - 2k = 0; \quad (1)$$

для количества теплоты Q

$$b + f + k = 0; \quad (2)$$

для времени τ

$$-b - k + m = 0; \quad (3)$$

для температуры ϑ

$$-b - f - k + n = 0; \quad (4)$$

для массы M

$$-f + i = 0. \quad (5)$$

Всего существенных величин семь (III-37), уравнений для определения показателей пять, значит только два показателя, например, b и k могут быть выбраны произвольно.

Выразим все показатели степеней через b и k . В результате получим: из (1), (2), (5)

$$a = b + 3f + 2k = b + 3(-b - k) + 2k = -2b - k;$$

из (2)

$$f = -b - k;$$

из (3)

$$m = b + k;$$

из (4) и (2)

$$n = b + f + k = b + (-b - k) + k = 0;$$

из (5) и (2)

$$i = f = -b - k.$$

Теперь одночлен (III-37) можно представить в форме

$$l^{-2b-k} \cdot \lambda^b \cdot c^{-b-k} \cdot \rho^{-b-k} \cdot \alpha^k \cdot \tau_0^{b+k}. \quad (\text{III-39})$$

Так как показатели b и k могут быть выбраны произвольно, положим:

1. $b = 1$, $k = 0$, при этом (III-39) примет вид

$$l^{-2} \cdot \lambda \cdot c^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \tau_0 = \frac{\lambda \tau_0}{l^2 c \rho} = \frac{a \tau_0}{l^2},$$

откуда

$$\frac{a \tau_0}{l^2} = \text{Fo}.$$

Обозначим временно

$$\frac{\lambda \tau_0}{l^2 c \rho} = \Pi_1.$$

2. $b = 0$; $k = 1$, при этом (III-39) примет вид

$$l^{-1} \cdot c^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \alpha \cdot \tau_0 = \frac{\alpha \tau_0}{l c \rho},$$

обозначим временно

$$\frac{\alpha \tau_0}{l c \rho} = \Pi_2.$$

Найдем отношение

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \frac{\frac{\alpha \tau_0}{l c \rho}}{\frac{\lambda \tau_0}{l^2 c \rho}} = \frac{\alpha l}{\lambda} \equiv \text{Bi}.$$

Итак, методом анализа размерностей найдены безразмерные комплексы. В рассматриваемом случае ими оказались критерии подобия Фурье и Био, найденные ранее [уравнения (III-9) и (III-11)] другим методом. Введем безразмерные — искомую переменную ϑ/ϑ_0 и независимую переменную x/l (одномерный случай). Тогда искомую обобщенную зависимость можно представить в форме

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f\left(\frac{x}{l}, \text{Fo}, \text{Bi}\right). \quad (\text{III-40})$$

Правильность полученного результата подтверждает так называемая π -теорема Бэкингема, которая формулируется так: *число безразмерных комплексов равно числу физических величин, существенных для процесса, минус число первичных величин.*

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

При стационарном режиме температурное поле $T(x, y, z, \tau)$ не зависит от времени, т. е. $\frac{\partial T}{\partial \tau} \equiv 0$. Дифференциальное уравнение теплопроводности (II-55)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T \quad (\text{IV-1})$$

приобретает вид (II-56 и II-57)

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{IV-2})$$

Для решения конкретной задачи к уравнению (IV-2) следует присовокупить соответствующие граничные условия.

Рассмотрим несколько простейших случаев определения стационарного поля температур в телах различной формы.

§ 1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ С ОДНОМЕРНЫМ ПОЛЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Плоская стенка

Рассмотрим неограниченную плоскую стенку толщиной δ , поверхности которой параллельны плоскостям y, z декартовой координатной системы и расположены при $x = 0$ и $x = \delta$ (рис. IV-1).

Пусть на этих поверхностях поддерживаются соответственно температуры T_1 и T_2 , т. е. заданы граничные условия первого рода (гл. II, § 5). Если T_1 и T_2 не зависят от координат y и z , то, очевидно, и искомое температурное поле не будет зависеть от этих координат, и уравнение (IV-2) для определения температуры $T(x)$ примет вид

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (\text{IV-3})$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} T &= T_1 \quad \text{при } x = 0 \\ T &= T_2 \quad \text{при } x = \delta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-4})$$

Уравнение (IV-3) немедленно интегрируется. Его общее решение имеет вид

$$T(x) = C_1 x + C_2, \quad (\text{IV-5})$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий (IV-4).

Действительно, полагая в (IV-5) $x = 0$ и используя первое из уравнений (IV-4), получим

$$T_1 = C_2, \quad (\text{IV-6})$$

а при $x = \delta$ на основании второго условия (IV-4) и (IV-6) имеем

$$T_2 = C_1 \delta + C_2 = C_1 \delta + T_1, \quad (\text{IV-7})$$

откуда

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta}.$$

Окончательно решение уравнения (IV-3) при граничных условиях (IV-4) имеет вид

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{\delta}. \quad (\text{IV-8})$$

Из (IV-8) видно, что $T(x)$ линейно зависит от x , эта зависимость $T(x) = f(x)$ по толщине стенки показана на рис. IV-1.

Тепловой поток q может быть определен из закона Фурье (I-3)

$$q = -\lambda \text{grad } T,$$

или в нашем случае

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

Дифференцируя распределение температуры по толщине стенки (IV-8), получим

$$\frac{dT}{dx} = (T_2 - T_1) \frac{1}{\delta},$$

откуда

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda (T_1 - T_2) \frac{1}{\delta}. \quad (\text{IV-9})$$

Из формулы (IV-9) видно, что при $T_1 > T_2$ тепловой поток положителен, т. е. направлен вдоль положительного направления оси x . При $T_1 < T_2$ он будет направлен в обратную сторону. Этот результат является следствием второго начала термодинамики, согласно которому, в частности, теплота передается от более нагретого менее нагретому телу. Количество теплоты, переданное через стенку в единицу времени, легко вычисляется с помощью (IV-9) и равно

$$Q = qF = \lambda (T_1 - T_2) \frac{1}{\delta} F. \quad (\text{IV-10})$$

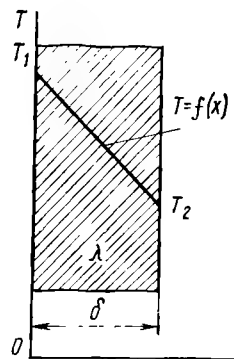


Рис. IV-1. Теплопроводность плоской стенки

Цилиндрическая стенка

Перепишем уравнение Фурье (II-54) в цилиндрической системе координат. Для этого используем известные соотношения, связывающие декартовы и цилиндрические координаты (рис. IV-2),

$$x = r \cos \Theta, \quad y = r \sin \Theta, \quad z = z.$$

После выполнения этой замены переменных уравнение (II-54) в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (\text{IV-11})$$

Рассмотрим стационарный одномерный процесс теплопроводности в бесконечной цилиндрической стенке (рис. IV-3). Если

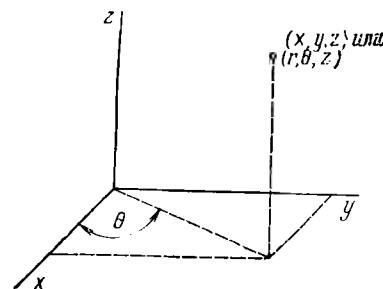


Рис. IV-2. Соотношение прямоугольных и цилиндрических координат

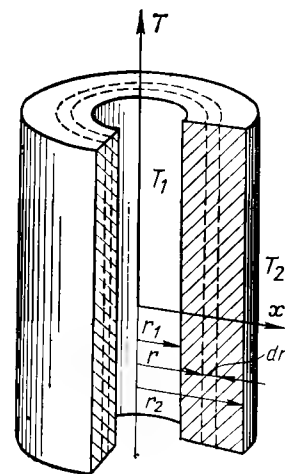


Рис. IV-3. Теплопроводность цилиндрической стенки

граничные условия на внутренней ($r = r_1$) и внешней ($r = r_2$) поверхностях стенки таковы, что они не зависят от угла Θ и z , то, очевидно, что и искомое температурное поле не будет зависеть от этих переменных и в стационарном случае уравнение (IV-11) примет вид

$$\frac{d^2 T(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT(r)}{dr} = 0. \quad (\text{IV-12})$$

Пусть заданы граничные условия первого рода, тогда:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при} \quad r = r_1 \quad T = T_1 \\ \text{и} \\ \text{при} \quad r = r_2 \quad T = T_2. \end{array} \right\} \quad (\text{IV-13})$$

Определим распределение температуры по толщине стенки.

Уравнение (IV-12) можно переписать

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad (\text{IV-14})$$

Теперь оно может быть немедленно проинтегрировано один раз; в результате имеем

$$r \frac{dT}{dr} = C_1$$

или

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r},$$

откуда после второго интегрирования получим общее решение уравнения (IV-14):

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2. \quad (IV-15)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 должны быть определены из граничных условий (IV-13):

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2 \\ \text{и} \\ \text{при } r = r_2 \quad T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2. \end{array} \right\} \quad (IV-16)$$

Решая (IV-16) относительно C_1 и C_2 , найдем первую постоянную интегрирования C_1

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

и вторую постоянную интегрирования C_2

$$C_2 = T_2 - C_1 \ln r_2 = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r_2 = \frac{T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (IV-15), получим искомое распределение температуры по толщине цилиндрической стенки

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (IV-17)$$

Таким образом, $T(r)$ логарифмически зависит от радиальной координаты r .

Плотность теплового потока q определяется из закона Фурье. На основании (IV-17), имеем

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\frac{\lambda (T_2 - T_1)}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (IV-18)$$

Количество теплоты, проходящее сквозь цилиндрическую стенку, отнесенное к единице длины трубы, можно определить по следующей формуле:

$$Q = qF = q \cdot 2\pi r = \frac{2\pi\lambda (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (IV-19)$$

Естественно, что Q не зависит от r , так как теплота нигде не аккумулируется.

Многослойная цилиндрическая стенка

По аналогии с (I-6) можно предположить, что тепловое сопротивление многослойной цилиндрической стенки (рис. IV-4) равно сумме тепловых сопротивлений отдельных слоев. На основании этого утверждения и используя формулу (IV-19), можно написать уравнение для определения количества теплоты, проходящего сквозь многослойную цилиндрическую стенку,

$$Q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{1}{2\pi\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\pi\lambda_3} \ln \frac{r_4}{r_3}}, \quad (IV-20)$$

где Q — отнесено к единице длины стенки.

Сферическая стенка

Преобразуем уравнение (II-54) к сферической системе координат. Для этого используем следующее соотношение между декартовыми и сферическими координатами (рис. IV-5):

$$x = r \sin \Theta \cos \Phi, \quad y = r \sin \Theta \sin \Phi, \quad z = r \cos \Theta.$$

В сферической системе координат уравнение (II-54) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} \right]. \quad (IV-21)$$

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в сферической стенке (оболочке) (рис. IV-6), на внутренней ($r = r_1$) и внешней ($r = r_2$) поверхностях которой поддерживаются температуры T_1 и T_2 соответственно. Если T_1 и T_2 постоянны, т. е. не зависят от направления, определяемого углами Θ и Φ , то и искомое температурное

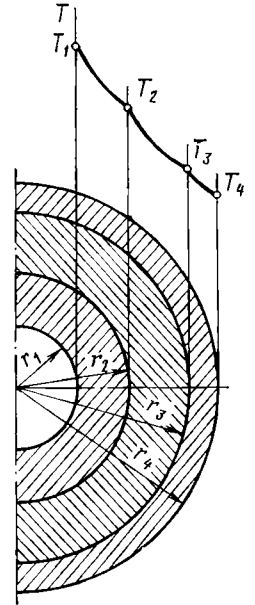


Рис. IV-4. Теплопроводность многослойной цилиндрической стенки

поле в сферической стенке не будет зависеть от этих переменных, а будет лишь функцией радиальной переменной r . Тогда дифференциальное уравнение (IV-21) в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 T(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT(r)}{dr} = 0. \quad (\text{IV-22})$$

Пусть заданы граничные условия первого рода:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \\ \text{при } r = r_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = T_1, \\ T = T_2. \end{array} \quad (\text{IV-23})$$

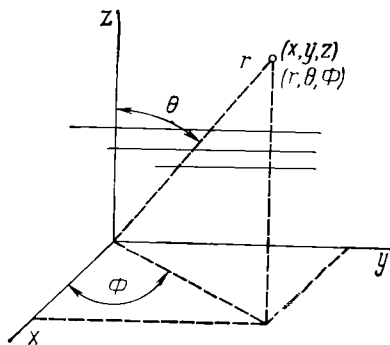


Рис. IV-5. Соотношение прямоугольных и сферических координат

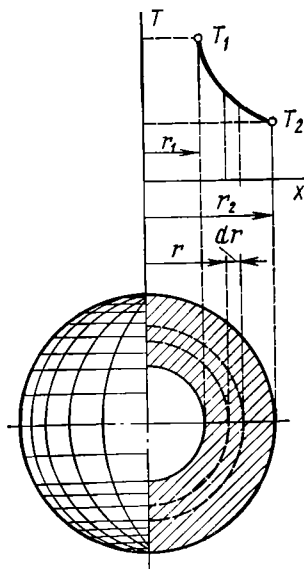


Рис. IV-6. Теплопроводность сферической стенки

Путем решения краевой задачи (IV-22, IV-23) требуется определить распределение температуры по толщине сферической стенки. Перепишем уравнение (IV-22) в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad (\text{IV-24})$$

В результате первого интегрирования получим

$$r^2 \frac{dT}{dr} = C_1$$

или

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}.$$

Второе интегрирование дает

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2. \quad (\text{IV-25})$$

С помощью граничных условий (IV-23) получаем из общего решения (IV-25) уравнения для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 :

$$\text{при } r = r_1 \quad T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2,$$

$$\text{при } r = r_2 \quad T_2 = -\frac{C_1}{r_2} + C_2.$$

Решая эти уравнения относительно C_1 и C_2 , получим

$$C_1 = (T_2 - T_1) \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = (T_2 - T_1) \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)$$

и

$$C_2 = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{r_2}{r_2 - r_1}.$$

Подставим C_1 и C_2 в общее решение (IV-25). Произведя упрощение, окончательно получим

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (\text{IV-26})$$

Из (IV-26) видно, что температура $T(r)$ изменяется по толщине сферической стенки по гиперболе.

Определим тепловой поток из решения (IV-26)

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda (T_2 - T_1) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{1}{r^2}.$$

Количество теплоты, передаваемое через сферическую поверхность в единицу времени, равно

$$Q = qF = q \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\lambda (T_1 - T_2) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (\text{IV-27})$$

Оно по тем же причинам, что и в случае цилиндрической стенки, не зависит от r .

§ 2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛЕ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ

Выше рассматривался процесс теплопроводности в твердых телах, обусловленный внешними условиями, т. е. распределением температуры и тепловых потоков на поверхности тела и возникающим вследствие этого подводом (отводом) теплоты из внешней среды. Математически это отражалось в задании тех или иных граничных условий на поверхности тела. Рассмотрим теперь процесс теплопроводности в том случае, когда, кроме таких внешних источников теплоты, имеются и внутренние источники (стоки), распространенные каким-либо образом по объему тела.

Можно привести многочисленные примеры подобных процессов. Ограничимся упоминанием о том, что при течении электрического тока в проводнике выделяется теплота. Теплота выделяется и в объемах тепловыделяющих элементов, и замедлителя ядерного реактора. При протекании некоторых химических реакций в объеме рассматриваемого тела выделяется (поглощается) теплота*.

В таких задачах теплопроводности искомым как обычно является распределение температуры в рассматриваемом теле, а мощность внутреннего источника (стока) теплоты считается заданной.

Мощность источника (стока) называют количеством теплоты, выделяемое (поглощаемое) единицей объема тела в единицу времени; обозначается эта величина через q_v и измеряется в килоджоулях на кубический метр в секунду [$\text{кдж}/\text{м}^3 \cdot \text{сек}$].

В зависимости от характера процесса, протекающего в рассматриваемом теле, источник (сток) теплоты может выбираться переменным или постоянным по времени, сосредоточенным в определенных частях или точках объема тела или равномерно распределенным по объему, а также и зависящим от температуры.

Уравнение теплопроводности при наличии внутренних источников теплоты запишется в виде

$$\text{ср } \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + q_v, \quad (\text{IV-28})$$

так как изменение количества теплоты в единице объема в единицу времени обусловлено теперь не только процессом теплопроводности (первый член в правой части уравнения (IV-28)), но и выделением (поглощением) теплоты в рассматриваемом единичном объеме q_v . Ниже будут рассмотрены задачи с постоянным по времени и равномерно распределенным по объему источником теплоты.

Теплопроводность бесконечной стенки с внутренним источником теплоты

Пусть плоская стенка (рис. IV-7), неограниченная в плоскости yz , омывается с обеих сторон жидкостью с постоянной температурой T_f ; коэффициент теплоотдачи α и мощность равномерно распределенного по объему стенки источника теплоты q_v заданы. Необходимо найти распределение температуры по толщине стенки.

Так как условия на поверхностях стенки $x = -l$ и $x = l$ постоянны, т. е. не зависят от координат y и z , то и температура будет функцией лишь x , и уравнение (IV-28) примет вид

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = -q_v \quad (\text{IV-29})$$

при условии

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=l} = \alpha (T_{x=l} - T_f) \quad (\text{IV-30})$$

* В последнем и некоторых других случаях источник теплоты может зависеть не только от координат, но и от температуры.

и аналогичном условии на поверхности $x = -l$, которое ввиду симметрии температурного поля относительно плоскости $x = 0$ может быть заменено на условие

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \quad (\text{IV-31})$$

Введем температуру, отсчитываемую от температуры омывающей жидкости,

$$\vartheta = T - T_f. \quad (\text{IV-32})$$

Тогда краевая задача (IV-29 и IV-31) переписывается

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = -\frac{q_v}{\lambda}; \quad (\text{IV-33})$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\vartheta}{dx} \Big|_{x=l} &= \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta \Big|_{x=l}; \\ \frac{d\vartheta}{dx} \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-34})$$

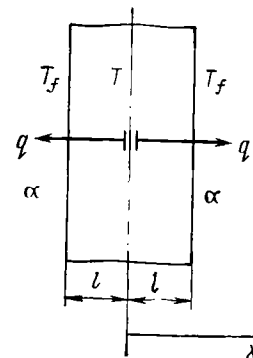


Рис. IV-7. Теплопроводность плоской стенки с источником теплоты

Проинтегрируем уравнение (IV-33). Запишем его в форме

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right) = -\frac{q_v}{\lambda};$$

после первого интегрирования оно примет вид

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} x + C_1; \quad (\text{IV-35})$$

после второго интегрирования получим общее решение (IV-33) в виде

$$\vartheta = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (\text{IV-36})$$

Остается использовать граничные условия (IV-34) для определения постоянных C_1 и C_2 . Из (IV-35) и второго граничного условия (IV-34) следует, что

$$C_1 = 0.$$

Подставляя

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} x$$

и

$$\vartheta = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + C_2 \quad (\text{IV-37})$$

при $x = l$ в первое из условий (IV-34), получим

$$\frac{q_V}{\lambda} l = \frac{\alpha}{\lambda} \left(C_2 - \frac{q_V}{2\lambda} l^2 \right),$$

т. е.

$$C_2 = \frac{q_V l^2}{2\lambda} + \frac{q_V l}{\alpha}.$$

Подставив значение постоянной интегрирования C_2 в (IV-37), получим решение в виде

$$\vartheta = \frac{q_V l^2}{2\lambda} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + \frac{q_V l}{\alpha}. \quad (\text{IV-38})$$

Отметим, что полученное решение зависит от x квадратично (параболическая зависимость), в то время как при отсутствии внутренних источников зависимость была линейной [см. (IV-8)].

Представим решение (IV-38) в обобщенных координатах. Разделив все члены (IV-38) на величину $\frac{q_V l^2}{2\lambda}$, имеющую размерность температуры, и, выбрав в качестве характерного размера стенки половину ее толщины l , получим

$$\frac{\vartheta}{\frac{q_V l^2}{2\lambda}} = \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + \frac{2}{\text{Bi}}. \quad (\text{IV-39})$$

Левая часть (IV-39) представляет собой безразмерную искомую температуру, в правую входит независимая переменная в форме безразмерной координаты $\frac{x}{l}$ и комплексный параметр в форме критерия Био. Таким образом, (IV-39) представляет собой конкретную функцию вида (III-13а)*

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f\left(\frac{x}{l}, \text{Bi}\right)$$

(где характерная температура $\vartheta_0 = \frac{q_V l^2}{2\lambda}$), полученную на основании аналитического решения уравнения (IV-33) совместно с граничными условиями (IV-34).

Теплопроводность цилиндрической стенки с источником теплоты

Пусть цилиндрическая стенка (рис. IV-8) с равномерно распределенным по ее толщине источником теплоты охлаждается с наружной стороны жидкостью с температурой T_f ; коэффициент теплоотдачи α и интенсивность источника q_V заданы. Требуется найти распределение температур $\vartheta = T - T_f$ по толщине стенки.

* В данном случае нет необходимости вводить параметрические критерии.

Если рассматриваемый полый цилиндр можно считать бесконечным, а температуру внешней среды T_f постоянной, то искомое распределение температур будет зависеть лишь от радиальной координаты, таким образом, для $\vartheta(r)$ имеем уравнение

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q_V}{\lambda}. \quad (\text{IV-40})$$

Предположим, что на внешней поверхности цилиндрической стенки при $r = r_2$ происходит теплообмен по закону Ньютона, тогда

$$-\lambda \frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_2} = \alpha \vartheta \Big|_{r=r_2}. \quad (\text{IV-41})$$

Если предположить, что внутренняя поверхность $r = r_1$ теплоизолирована, то имеем

$$\frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (\text{IV-42})$$

Уравнение (IV-40) запишем в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\vartheta}{dr} \right) = -\frac{q_V}{\lambda}, \quad (\text{IV-43})$$

тогда

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\vartheta}{dr} \right) = -\frac{q_V}{\lambda} r;$$

интегрируя, получим

$$r \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q_V}{\lambda} \frac{r^2}{2} + C_1,$$

т. е. для первой производной имеем

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q_V}{\lambda} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}. \quad (\text{IV-44})$$

Повторно интегрируя, получим общее решение уравнения (IV-43)

$$\vartheta = -\frac{q_V}{\lambda} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2. \quad (\text{IV-45})$$

Определим с помощью граничных условий (IV-41) и (IV-42) произвольные постоянные C_1 и C_2 . Из условия (IV-42) определяем C_1

$$\frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_1} = -\frac{q_V r_1}{2\lambda} + \frac{C_1}{r_1} = 0,$$

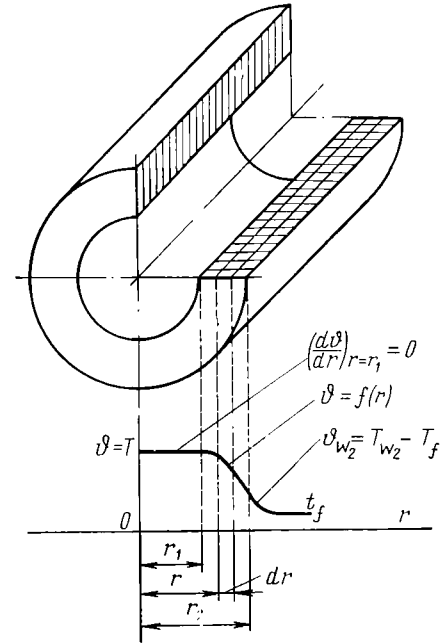


Рис. IV-8. Теплопроводность цилиндрической стенки с источником теплоты

т. е.

$$C_1 = \frac{q_V r_1^2}{2\lambda}.$$

Далее, из условия (IV-41) определяем C_2

$$-\lambda \left[-\frac{q_V}{2\lambda} r_2 + \frac{q_V r_1^2}{2\lambda r_2} \right] = \alpha \left[-\frac{q_V}{4\lambda} r_2^2 + \frac{q_V r_1^2}{2\lambda} \ln r_2 + C_2 \right],$$

отсюда

$$C_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{q_V r_2}{2} - \frac{q_V r_1^2}{2r_2} \right) + \frac{q_V r_2^2}{4\lambda} - \frac{q_V r_1^2}{2\lambda} \ln r_2.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в (IV-45), получим частное решение уравнения (IV-40), которое представляет собой искомое распределение температуры в заданной цилиндрической стенке

$$\vartheta = \frac{q_V r_2^2}{4\lambda} \left\{ \frac{2\lambda}{\alpha r_2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + 1 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \ln \frac{r_2}{r} \right\}. \quad (IV-46)$$

Представим решение (IV-46) в обобщенных координатах. Разделим все члены (IV-46) на $q_V r_2^2 / 4\lambda$ и, выбрав в качестве характерного размера радиус наружной (охлаждаемой) поверхности цилиндрической стенки r_2 , получим

$$\frac{\vartheta}{q_V r_2^2 / 4\lambda} = \frac{2}{Bi} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + 1 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \ln \frac{r_2}{r}. \quad (IV-47)$$

Левая часть (IV-47), так же как и (IV-39), представляет собой безразмерную искомую температуру, в правую входит независимая переменная в форме r/r_2 и комплексный параметр в форме критерия Био. Так же как и в случае (IV-39), уравнение (IV-47) представляет собой конкретную функцию вида (III-13а).

Для цилиндрического стержня ($r_1 = 0$) обобщенная зависимость (IV-47) примет вид

$$\frac{\vartheta}{q_V r_2^2 / 4\lambda} = \frac{2}{Bi} + 1 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2. \quad (IV-48)$$

§ 3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛЕ С ДВУМЕРНЫМ ПОЛЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Для двумерного температурного поля вида $T = f(x, y)$ получение аналитического решения, удовлетворяющего дифференциальному уравнению и граничным условиям, целесообразно для тел простой формы. Для тел сложной формы решение получается громоздким, а в отдельных случаях его можно и не получить; тогда для практических расчетов аналитическое решение либо упрощают одним из численных прибли-

женных способов, либо задачу решают численно, например, на электронно-счетной машине.

Найдем аналитическое решение дифференциального уравнения при некоторых граничных условиях, которые укажем позже. Для двумерного температурного поля вида $T = T(x, y)$ уравнение (II-54) имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (IV-49)$$

Для решения применим метод разделения переменных. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций, т. е.

$$T = f(x, y) = X(x)Y(y), \quad (IV-50)$$

где $X(x)$ — функция только переменного x ;

$Y(y)$ — функция только переменного y .

Подставив выражение для T из (IV-50) в (IV-49), получим

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0.$$

После почленного деления на X и Y имеем

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (IV-51)$$

Так как левая часть (IV-51) не зависит от x и равна величине (правой части), которая не зависит от y , то их общее (обеих частей) значение не зависит ни от x , ни от y . Значит, общее значение (обеих частей) сводится к постоянной величине, которую удобно взять в форме k^2 (либо $-k^2$), где $k \geq 0$.

Теперь уравнение (IV-51) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - k^2 Y = 0 \quad (IV-52)$$

и

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0. \quad (IV-53)$$

Для уравнения (IV-52) будем искать решение вида

$$Y = e^{ry}. \quad (IV-54)$$

Подставим (IV-54) в (IV-52). В результате получим

$$r^2 e^{ry} - k^2 e^{ry} = 0.$$

Откуда

$$r^2 - k^2 = 0. \quad (IV-55)$$

Значит, характеристическое уравнение (IV-55) имеет два корня

$$r = \pm k.$$

В этом случае имеем два решения

$$Y = e^{ky} \quad \text{и} \quad Y = e^{-ky}.$$

Общее решение (IV-50) имеет вид

$$Y = Ce^{ky} + D e^{-ky}, \quad (IV-56)$$

где C и D — произвольные постоянные величины.

Аналогично для уравнения (IV-51) найдем решение вида

$$X = e^{rx}. \quad (IV-57)$$

Подставим (IV-57) в (IV-53); в результате получим

$$r^2 + k^2 = 0, \quad r^2 = -k^2 \quad (IV-58)$$

и

$$r = \pm \sqrt{-k^2} = \pm \sqrt{k^2} \sqrt{-1} = \pm ik, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Значит, характеристическое уравнение (IV-57) имеет пару чисто мнимых корней. По аналогии с (IV-56) напомним общее решение для (IV-53)

$$X = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}, \quad (IV-59)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Однако выражения e^{ikx} и e^{-ikx} не имеют действительных значений ни при каком действительном значении x , кроме $x = 0$.

Используя формулу Эйлера

$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx, \quad (IV-60)$$

можно представить (IV-59) в виде*

$$X = A \cos kx + B \sin kx. \quad (IV-61)$$

Теперь можно написать общее решение уравнения (IV-59) на основании (IV-60) в виде

$$T = XY = (A \cos kx + B \sin kx)(Ce^{ky} + D e^{-ky}) \quad (IV-62)$$

и применять его для решения конкретных задач.

Теплопроводность плоской стенки при двумерном поле температуры

Рассмотрим конкретную задачу о теплопроводности в плоской стенке (рис. IV-9).

Пусть температурное поле стенки имеет вид $T = f(x, y)$, температура в направлении оси z (по толщине стенки) во всех точках имеет

*
$$X = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} = C_1 (\cos kx + i \sin kx) + C_2 (\cos kx - i \sin kx) = (C_1 + C_2) \cos kx + i(C_1 - C_2) \sin kx = A \cos kx + iB \sin kx; \\ (A = C_1 + C_2, \quad B = C_1 - C_2).$$

одно и то же значение. Уравнение Лапласа (II-56) для данной задачи в избыточных температурах (гл. III, § 2) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0. \quad (IV-63)$$

Заданы граничные условия первого рода

$$\vartheta = T - T_a = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = L. \quad (IV-64)$$

Здесь ϑ — искомая избыточная температура стенки;

T_a — температура боковых поверхностей стенки (рис. IV-9) поддерживается постоянной.

$$\vartheta_1 = T_1 - T_a \quad \text{при} \quad y = 0 \quad 0 < x < L; \quad (IV-65)$$

$$\vartheta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad (IV-66)$$

где T_1 — температура нижнего торца (см. рис. IV-9) стенки поддерживается постоянной.

Решением уравнения (IV-63) будет уравнение (IV-62), если в последнем заменить абсолютную переменную температуру T на избыточную переменную ϑ . Граничные условия (IV-64 и IV-66) используем для определения постоянных коэффициентов A, B, C, D .

Из первого условия (IV-64) следует, что при $x = 0$ и $A = 0$. Действительно, так как ϑ при $x = 0$ должна равняться нулю, но $\cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1$, т. е. не равен нулю, то коэффициент A должен быть равен нулю. Так как нас интересуют нетривиальные решения, т. е. не равные нулю тождественно, то коэффициент B не может быть равным нулю, а поэтому при $x = L$ требуем, чтобы $\sin kL = 0$.

Те значения, при которых уравнение (IV-63) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие краевым условиям (IV-64), называются собственными значениями, а нетривиальные решения этой задачи называются собственными функциями, соответствующими данному собственному значению.

Итак, $kL = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Следовательно, $k_1 = \pi/L$, $k_2 = 2\pi/L$, ..., $k_n = n\pi/L$, ...

Из условия (IV-66) следует, что коэффициент $C = 0$ (так как при $y \rightarrow \infty$, e^{ky} неограниченно возрастает). С учетом $A = 0$, $C = 0$ решение (IV-62) примет вид

$$\vartheta = B D e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)y} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = E e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)y} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (IV-67)$$

Решение (IV-67) удовлетворяет дифференциальному уравнению (IV-63) при любом натуральном значении n .

Из полученных решений (IV-67) видно, что ни одно из них не удовлетворяет условию (IV-65) ни при каком выборе $E = E_n$, если $T_1 - T_a \neq 0$. Если $T_1 - T_a = 0$, то единственным решением задачи будет тривиальное решение $\vartheta = 0$. С другой стороны, сумма любых двух

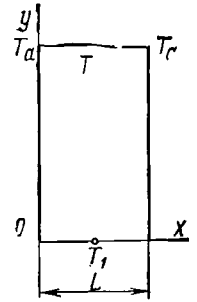


Рис. IV-9. Теплопроводность при двумерном температурном поле, $T = f(x, y)$

(а значит и любого конечного числа) решений линейного однородного дифференциального уравнения также является решением.

Оказывается, что, просуммировав бесконечное число решений типа (IV-67), удастся так выбрать $E = E_n$, что удовлетворяется условие (IV-65) [а также и условие (IV-66)] и полученная бесконечная сумма

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\frac{n\pi}{L}y} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (\text{IV-68})$$

сходится и является решением краевой задачи (IV-63), (IV-64), (IV-65) и (IV-66).

Для нахождения E_n в (IV-68) используем граничное условие (IV-65). При $y = 0$ уравнение (IV-68) имеет вид

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (\text{IV-69})$$

Для осмысливания выражения (IV-69) вспомним следующие положения из математики. Если функция $f(x)$ с периодом 2π дифференцируема или хотя бы кусочно дифференцируема, то ее можно разложить в ряд Фурье вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (\text{IV-70})$$

где a_0 , a_n и b_n — величины, называемые коэффициентами ряда Фурье и определяемые по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (\text{IV-71})$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx; \quad (\text{IV-71a})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (\text{IV-72})$$

Если функция $f(x)$, кусочно дифференцируемая в промежутке $[-\pi, \pi]$, будет нечетной, то нечетной будет и функция $f(x) \cos nx$. Напомним, что для нечетной функции справедливо равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Тогда для нее

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0$$

и, следовательно, для (IV-71) можно написать

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Значит ряд Фурье (IV-70) для нечетной функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (\text{IV-73})$$

Для определения b_n из (IV-72) вспомним, что для четной функции справедливо равенство

$$f(-x) = f(x)$$

и значит

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \, dx, \quad (\text{IV-74})$$

но если $f(x)$ нечетная функция, то произведение $f(x) \sin x$ будет четным и коэффициент b_n с учетом (IV-72) определится из выражения

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (\text{IV-75})$$

Если функция $f(x)$ задана в промежутке $[0, L]$ ($L > 0$), то, производя замену переменной, можно переписать выражения (IV-73) и (IV-75) в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (\text{IV-76})$$

и

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV-77})$$

Теперь вернемся к выражению (IV-69). Положим $f(x) = \Phi_1$. Тогда выражения (IV-69) и (IV-76) идентичны. Значит выражение (IV-69) представляет собой ряд Фурье для постоянной Φ_1 в промежутке $[0, L]$ ($L > 0$). Постоянная E_n равна b_n и определяется по формуле (IV-77)

$$\begin{aligned} E_n = b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \Phi_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \\ &= \frac{2\Phi_1}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{-2\Phi_1}{L} \frac{L}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{L}x \Big|_0^L. \end{aligned}$$

При $n = 1, 3, 5$, $\cos n\pi = -1$

$$E_n = \frac{-2\vartheta_1}{L} \left(\frac{L}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \Big|_0^L = \frac{-2\vartheta_1}{n\pi} (-1) + \frac{2\vartheta_1}{n\pi} (+1) = \frac{4\vartheta_1}{n\pi};$$

при $n = 2, 4, 6$, $\cos n\pi = +1$ и $E_n = 0$.

Теперь частное решение (IV-68) можно написать в окончательном виде

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5} \frac{e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)y}}{n} \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right). \quad (IV-78)$$

Здесь использован следующий результат: если функция $f(x)$, имеющая период, разлагается в равномерно сходящийся ряд, то последний необходимо будет ее рядом Фурье. [Ряд (IV-78) сходится, очевидно, равномерно.]

Отметим, что согласно (IV-78) температура стенки в любой точке не зависит от коэффициента теплопроводности, так как был рассмотрен случай, когда в стенке нет тепловых потоков. Из полученного решения также очевидно, что если $\vartheta_1 = 0$, то решение $\vartheta \equiv 0$.

§ 4. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В РЕБРЕ ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При передаче теплоты от капельной жидкости (α_1) через твердую стенку к газу (α_2) суммарное тепловое сопротивление $1/k$ определяют по формуле (I-12)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (IV-79)$$

Наибольший вклад в суммарное тепловое сопротивление вносит последний член $1/\alpha_2$, он на один, а иногда и на два порядка больше первого члена $1/\alpha_1$. Обычно увеличить α_2 не удастся и для интенсификации теплообмена увеличивают поверхность стенки на стороне газа путем ее оребрения.

Рассмотрим теплопроводность в ребре постоянного поперечного сечения [112]. Упростим реальный процесс и будем считать, что:

- 1) температура ребра T изменяется только вдоль оси z ;
- 2) теплота передается в окружающую среду только с поверхностей верхней (Lb) и нижней (Lb) граней ребра;
- 3) коэффициент теплоотдачи от граней ребра в окружающую среду α — величина постоянная, и тепловой поток определяется по формуле

$$q = \alpha(T - T_f), \quad (IV-80)$$

где T_f — температура окружающей среды.

Выведем дифференциальное уравнение теплопроводности ребра. Для этого составим уравнение теплового баланса выделенного объема ребра (рис. IV-10) в виде

$$q_z 2hb - q_{z+\Delta z} 2hb - \alpha(2b \Delta z)(T - T_f) = 0;$$

разделим все члены полученного уравнения на $2hb$ и найдем предел при $\Delta z \rightarrow 0$

$$-\frac{dq_z}{dz} = \frac{\alpha}{h}(T - T_f). \quad (IV-81)$$

Подставим в (IV-81) вместо q_z его значение из уравнения (I-3а) закона Фурье; в результате получим искомое дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемого ребра

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{\alpha}{\lambda h}(T - T_f). \quad (IV-82)$$

Это уравнение будет решено при дополнительных граничных условиях:

- 1) $T = T_w$ при $z = 0$,
- 2) $\frac{dT}{dz} = 0$ при $z = L$.

$$(IV-83)$$

Решение представим в обобщенных переменных (III-13а). Введем безразмерные переменные для температуры

$$\frac{T - T_f}{T_w - T_f} = \Theta; \quad (IV-84)$$

для координаты

$$Z = \frac{z}{L}. \quad (IV-85)$$

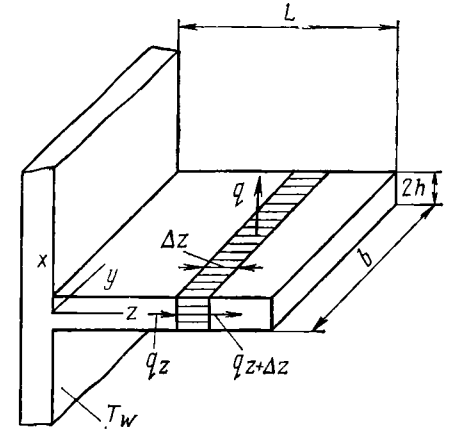


Рис. IV-10. Теплопроводность в ребре

Введем безразмерный аргумент в форме комбинации из критерия $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$ и параметрического критерия $P = \frac{L}{h}$ (за характерные размеры ребра приняты его длина L и половина толщины h). В данном случае наиболее удобная для решения комбинация критериев Bi и P имеет вид

$$N = 1 \quad \overline{BiP} = \sqrt{\frac{\alpha L^2}{\lambda h}}.$$

Условие задачи в обобщенных переменных запишется следующим образом:

дифференциальное уравнение (IV-82)

$$\frac{d^2 \Theta}{dZ^2} = N^2 \Theta; \quad (IV-86)$$

$$\Theta_{z=0} = 1 \quad (\text{IV-87})$$

и

$$\left[\frac{d\Theta}{dz} \right]_{z=1} = 0. \quad (\text{IV-88})$$

Решение системы (IV-86, IV-87, IV-88) получено через гиперболические функции в виде

$$\Theta = \text{ch } NZ - (\text{th } N) \text{sh } NZ \quad (\text{IV-89})$$

или

$$\Theta = \frac{\text{ch } N(1-Z)}{\text{ch } N}. \quad (\text{IV-90})$$

Введем характеристику эффективности ребра. В качестве ее меры примем отношение

$$\eta = \frac{\text{теплота, которая в действительности рассеивается поверхностью ребра}}{\text{теплота, которая рассеивалась бы при температуре всей поверхности ребра, равной } T_w}. \quad (\text{IV-91})$$

Для рассматриваемого случая и аналогичных ему эффективность ребра можно определить по формуле

$$\eta = \frac{\int_0^1 \Theta dz}{\int_0^1 dz} = \frac{1}{\text{ch } N} \left[-\frac{1}{N} \text{sh } N(1-Z) \right] \Big|_0^1 = \frac{\text{th } N}{N}. \quad (\text{IV-92})$$

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Остановимся на случае зависимости распространения теплоты в теле как от координат, так и от времени (теплопроводность при нестационарном режиме).

Процесс теплопроводности при нестационарном режиме с давних пор интересовал инженеров, ибо различные технологические операции, например нагревание металла дляковки, штамповки, закалки и др., происходят при нестационарном режиме.

Появление сверхзвуковых летательных аппаратов, ракетных двигателей и т. п. усилило интерес к процессам теплопроводности при нестационарном режиме.

В ряде случаев расчет тепловой защиты головной части ракеты или стенок камеры сгорания и сопла двигателя целесообразно вести с учетом нестационарности режима.

Дело в том, что летательные аппараты и их двигатели в ряде случаев работают в течение очень короткого времени и поэтому тепловые процессы в элементах их конструкции не успевают выйти на стационарный режим.

Нестационарные режимы теплопроводности могут быть периодическими или переходными. Периодическими режимами называют такие, при которых некоторое распределение температуры повторяется через определенный промежуток времени произвольное число раз.

Переходные процессы характеризуются переходом от одного стационарного режима к другому стационарному режиму.

В инженерной практике переходные процессы встречаются чаще и поэтому будут рассмотрены подробно.

§ 1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Уравнение нестационарной теплопроводности (при отсутствии источников теплоты в теле) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

где $T = f(x, y, z, \tau)$, $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ — коэффициент температуропроводности.

В одномерном случае уравнение упрощается

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (\text{V-1})$$

Решим уравнение (V-1) методом разделения переменных так же, как это было сделано при решении уравнения (IV-49).

Решение (V-1) будем искать в виде:

$$T = f(x, \tau) = X(x)F(\tau), \quad (V-2)$$

где X — функция только от x ;

F — функция только от τ .

Подстановка (V-2) в уравнение (V-1) и деление его на произведение $X(x)F(\tau)$ дает

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{F} \cdot \frac{dF}{d\tau}. \quad (V-3)$$

Раз левая часть равенства (V-3) является функцией только от x , а правая часть — функцией только от τ , то это значит, что они не меняются при изменении x и τ , т. е.

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{F} \cdot \frac{dF}{d\tau} = \text{const.}$$

Постоянную выберем в форме $\pm k^2$.

Теперь уравнение (V-3) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \pm k^2 X \quad (V-4)$$

и

$$\frac{dF}{d\tau} = \pm k^2 a F. \quad (V-5)$$

Уравнение (V-4) в случае $(+k^2)$ имеет следующее общее решение:

$$X = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}, \quad (V-6)$$

а в случае $(-k^2)$

$$X = C_3 \cos kx + C_4 \sin kx. \quad (V-7)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (V-5) решается разделением переменных

$$\frac{dF}{F} = \pm k^2 a d\tau.$$

После интегрирования этого уравнения получим

$$\ln F = \pm k^2 a \tau + \ln C_5,$$

откуда выписывается общее решение (V-5) для $(\pm k^2)$

$$F = C_5 e^{\pm k^2 a \tau}. \quad (V-8)$$

Общие решения (V-6), (V-7) и (V-8) используются для получения частных решений конкретных задач теплопроводности. Уравнение (V-6) предполагает экспоненциальное распределение температуры, а уравнение (V-7) допускает разложение распределения в бесконечные

ряды. Уравнение (V-8) может дать экспоненциальное распределение температуры (показатель степени со знаком минус) или периодическое, если k^2 является мнимой величиной.

Общее решение уравнения (V-1) (для случая $-k^2$) имеет вид

$$T = XF = (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx) C_5 e^{\pm k^2 a \tau}. \quad (V-9)$$

Отметим, что не всегда функцию, являющуюся решением уравнения (теплопроводности), можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависела бы только от одной переменной. Например, решением уравнения (V-1) является функция

$$T = C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(k-x)^2}{4a\tau}}. \quad (V-10)$$

Чтобы подтвердить это, дифференцируем (V-10) по τ , x

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &= C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(k-x)^2}{4a\tau}} \left[\frac{(k-x)^2}{4a\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right], \\ a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(k-x)^2}{4a\tau}} a \left[\frac{(k-x)^2}{4a\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right] \end{aligned} \right\} \quad (V-11)$$

и результаты подставим в (V-1).

Два последних уравнения тождественны друг другу, значит (V-10) является решением (V-1).

§ 2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Рассмотрим процесс охлаждения плоской стенки толщиной $2l$ (рис. V-1). Температура стенки T может изменяться только в направлении оси x . Такое ограничение возможно при одном из двух условий: первое состоит в том, что размеры стенки в направлении осей y и z не ограничены, т. е. сток теплоты с торцов стенки не исказит температурного поля в направлении оси x ; второе условие предусматривает совершенную тепловую изоляцию торцов, при этом размеры стенки в направлении осей y и z могут иметь конечные размеры.

При $\tau = 0$ стенка с начальной температурой T_0 , одинаковой во всех точках ее поперечного сечения*, приводится в контакт с жидкостью, температура которой T_f в процессе охлаждения стенки остается неизменной. Удобно принимать T_f за начало отсчета температуры, т. е.

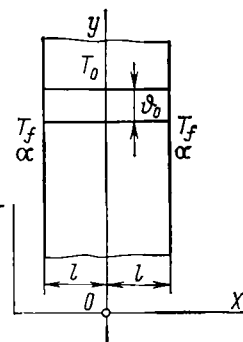


Рис. V 1. Нестационарная теплопроводность плоской стенки

* Более сложные случаи, когда $T_0 = f(x)$, рассмотрены в специальной литературе [57].

отсчитывать другие температуры от T_f как от нуля. Коэффициент теплоотдачи α от поверхности стенки к жидкости считается известным.

Математическая формулировка задачи включает уравнение теплопроводности, начальные и граничные условия. Уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая (V-1), записанное через избыточную температуру $\vartheta = T - T_f$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}, \quad (V-12)$$

а краевые условия (начальные и граничные) можно записать в следующей форме:

начальное условие

1) при $\tau = 0$ $\vartheta = T_0 - T_f = \vartheta_0$ для $-l \leq x \leq l$;

граничные условия

2) $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ при $\tau \geq 0$,

так как плоскость симметрии пластины проходит через $x=0$;

3) для $\tau > 0$ $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{\alpha}{\lambda} (\vartheta)_{x=l}$.

В рассматриваемом случае температура во всех точках стенки с течением времени будет уменьшаться, следовательно, следует выбрать постоянную в форме $-k^2$, где $k^2 > 0$. С учетом этого общее решение (V-9) можно написать в виде

$$\vartheta = C_5 e^{-ak^2 \tau} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx). \quad (V-13)$$

Для определения постоянных в (V-13) используем начальные и граничные условия 1, 2, 3.

Вначале используем граничное условие 2. Имеем

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = C_5 e^{-ak^2 \tau} (-C_3 k \sin kx + C_4 k \cos kx).$$

Это выражение должно быть равно нулю при $x = 0$. Так как $k \neq 0$, $k \cos kx \neq 0$ при $x = 0$, то постоянная C_4 должна быть равна нулю, т. е. $C_4 = 0$. Тогда (V-13) имеет вид

$$\vartheta = C e^{-ak^2 \tau} \cos kx. \quad (V-14)$$

Для нахождения собственных значений $k = k_n$ используем граничное условие 3. Продифференцируем (V-14) по x

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -C e^{-ak^2 \tau} k \sin kx. \quad (V-15)$$

Из (V-14) найдем

$$C e^{-ak^2 \tau} = \frac{\vartheta}{\cos kx}$$

и подставим в (V-15). В результате получим

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\vartheta}{\cos kx} k \sin kx.$$

Последнее уравнение при $x = l$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=l} = -k \vartheta \operatorname{tg} kl.$$

И, наконец, применяя граничное условие 3, получим

$$-k \vartheta |_{x=l} \operatorname{tg} kl = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta |_{x=l},$$

откуда

$$\operatorname{tg} kl = \frac{\alpha}{\lambda k}.$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\operatorname{ctg} P = \frac{P}{\frac{\alpha l}{\lambda}}, \quad (V-16)$$

где

$$P = kl.$$

Комплекс величин в знаменателе (V-16) представляет собой критерий Бюно (III-11)

$$\operatorname{ctg} P = \frac{P}{Bi}. \quad (V-17)$$

Трансцендентное уравнение (V-17) наиболее просто решается графическим способом. Обозначим левую и правую части уравнения через $y_{1,2}$. Тогда пересечение прямой $y_2 = \frac{P}{Bi}$ и котангенсоиды $y_1 = \operatorname{ctg} P$ (рис. V-2) определяет корень уравнения (V-17).

Из рис. (V-2) видно, что имеется бесчисленное количество корней для каждого значения Bi . На рисунке представлены первые корни P_1, P_2, P_3, P_4 для трех значений Bi . Найдем границы изменения Bi . Если $Bi \rightarrow \infty$, то из (III-11) устанавливаем, что при заданных материале стенки и ее размере $\alpha \rightarrow \infty$, при этом температуры стенки и жидкости оказываются

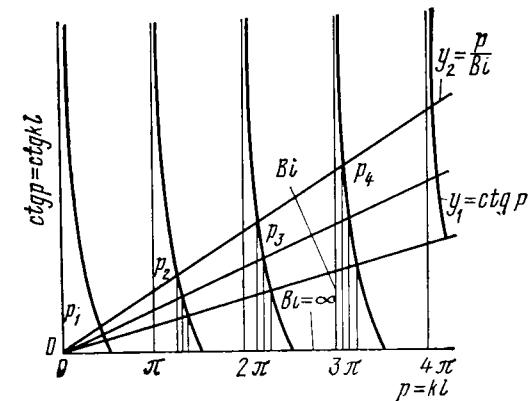


Рис. V-2. Графическое решение уравнения (V-17)

равными; прямая $y_2 = \frac{P}{Bi}$ совпадает с осью абсцисс, а корни уравнения (V-14) равны:

$$P_1 = \frac{\pi}{2}, \quad P_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad P_3 = \frac{5}{2}\pi, \dots, \quad P_i = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad (V-18)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$).

Если $Bi \rightarrow 0$, то и $\alpha \rightarrow 0$ и $(\vartheta)_{x=l} = \vartheta_0 = T_0 - T_f$, в данном случае теплоотдачи от пластины к жидкости нет: прямая $y_2 = \frac{P}{Bi}$ совпадает с осью ординат и корни уравнения (V-17) равны:

$$P_i = (n-1)\pi. \quad (V-19)$$

($n = 1, 2, \dots$)

Для каждого значения Bi в диапазоне изменения $0 \leq Bi < \infty$ решение краевой задачи (V-12), (1)–(3) будем искать в виде

$$\vartheta = \sum_{i=1,2}^{\infty} C_i \cos\left(P_i \frac{x}{l}\right) e^{-P_i^2 \frac{\alpha\tau}{l^2}}, \quad (V-20)$$

где $P_i = k_i l$.

Постоянные C_i определим по начальному условию 1. При $\tau = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$ для $-l \leq x \leq l$ выражение (V-20) примет вид

$$\vartheta_0 = \sum_{i=1,2}^{\infty} C_i \cos\left(P_i \frac{x}{l}\right). \quad (V-21)$$

Нетрудно показать, что система функций

$$\cos \frac{P_1}{l} x, \quad \cos \frac{P_2}{l} x, \quad \dots, \quad \cos \frac{P_n}{l} x$$

(где P_n — положительные корни трансцендентного уравнения) ортогональна на отрезке $[0, l]$, т. е. что

$$\int_0^l \cos\left(\frac{P_i}{l} x\right) \cos\left(\frac{P_j}{l} x\right) dx = \begin{cases} = 0, & \text{если } i \neq j, \\ \neq 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^l \cos^2\left(\frac{P_i}{l} x\right) dx = \frac{l}{2P_i} (\sin P_i \cos P_i + P_i).$$

Итак, для нахождения C_i поступим следующим образом (метод Фурье): обе части (V-21) умножим на $\cos \frac{P_i}{l} x$ и проинтегрируем по x

в интервале $[0, l]$. Тогда в силу ортогональности системы получим

$$\vartheta_0 \int_0^l \cos\left(\frac{P_i}{l} x\right) dx = C_i \int_0^l \cos^2\left(\frac{P_i}{l} x\right) dx, \quad (V-22)$$

откуда определяются все C_i

$$C_i = \vartheta_0 \frac{\int_0^l \cos\left(\frac{P_i}{l} x\right) dx}{\int_0^l \cos^2\left(\frac{P_i}{l} x\right) dx} = \vartheta_0 \frac{2 \sin P_i}{P_i + \sin P_i \cos P_i}. \quad (V-23)$$

Теперь можно написать решение в окончательном виде для задачи об охлаждении пластины, если значение для C_i из (V-23) подставить в уравнение (V-20). Итак, имеем

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{i=1,2}^{\infty} \frac{2 \sin P_i}{P_i + \sin P_i \cos P_i} \cos P_i \frac{x}{l} e^{-P_i^2 \left(\frac{\alpha\tau}{l^2}\right)}. \quad (V-24)$$

Введем обозначение

$$A_i = \frac{2 \sin P_i}{P_i + \sin P_i \cos P_i}; \quad (V-25)$$

или с учетом (V-17)

$$A_i = (-1)^{i+1} \frac{2 Bi \sqrt{Bi^2 + P_i^2}}{P_i (Bi^2 + Bi + P_i^2)}. \quad (V-26)$$

Анализ решения (V-24). Уравнение (V-24) с учетом (V-26) можно представить в обобщенных переменных в форме следующей зависимости (III-15):

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f\left(Bi, \frac{\alpha\tau}{l^2}, \frac{x}{l}\right),$$

где $\frac{\alpha\tau}{l^2}$ — число Фурье.

Для случая охлаждения стенки с учетом обозначения

$$\Theta = 1 - \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = 1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \quad (V-27)$$

зависимость (III-15) примет вид

$$\Theta = F\left(Bi, \frac{\alpha\tau}{l^2}, \frac{x}{l}\right). \quad (V-28)$$

Уравнение (V-24) очень громоздко и отыскание температурного поля в стенке занимает много времени. Поэтому в инженерной практике

для решения таких задач пользуются номограммами, составленными в форме уравнения (V-28). Обычно номограммы составляются для двух следующих значений безразмерной координаты:

$$\frac{x}{l} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{l} = 1,$$

которые соответствуют середине стенки (плоскость симметрии) и ее наружным поверхностям.

В соответствии с (V-28) в каждой такой номограмме за искомую безразмерную переменную температуру принимают Θ , за безразмерную независимую переменную — число Фурье $\left(\frac{a\tau}{l^2}\right)$ и за параметр — критерий Био. Если имеется конкретное решение для случая *охлаждения* тела в форме (V-28), то оно сохранит свою силу и для случая *нагрева* [57], при определении Θ следующим образом:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_f - T_0}, \quad (\text{V-29})$$

где T — искомая температура тела;

T_0 — начальная температура тела;

T_f — температура среды, омывающей тело.

На рис. V-3 и V-4 представлены номограммы [57] для определения безразмерной температуры Θ (V-27) в середине пластины (плоскость симметрии) и на боковых поверхностях.

Представляют интерес аналогичные решения (V-24) для других тел простой формы, например для шара и цилиндра бесконечной длины. Аналитические решения в связи с их громоздкостью здесь не приводятся. В обобщенных переменных оба решения для шара и цилиндра будут иметь вид, аналогичный (V-28).

На рис. V-5 и V-6 приведены номограммы для определения безразмерной температуры Θ (V-27) на поверхности шара (безразмерная координата $\frac{r}{R} = 1$; r — текущее значение радиуса, R — радиус шара) и в центре шара (безразмерная координата $\frac{r}{R} = 0$) при его нагревании. В критерий Био в качестве характерного размера введен радиус шара.

На рис. V-7 и V-8 приведены номограммы для определения безразмерной температуры Θ (V-27) на поверхности бесконечного цилиндра (безразмерная координата $\frac{r}{R} = 1$) и на оси цилиндра (безразмерная координата $\frac{r}{R} = 0$). В критерий Био в качестве характерного размера введен радиус цилиндра R .

Пользуются приведенными здесь номограммами (рис. V-3, V-4, V-5, V-6, V-7 и V-8) следующим образом: определяют число Фурье $Fo = \frac{a\tau}{l^2}$ и критерий $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$ (все величины для вычисления Fo и Bi

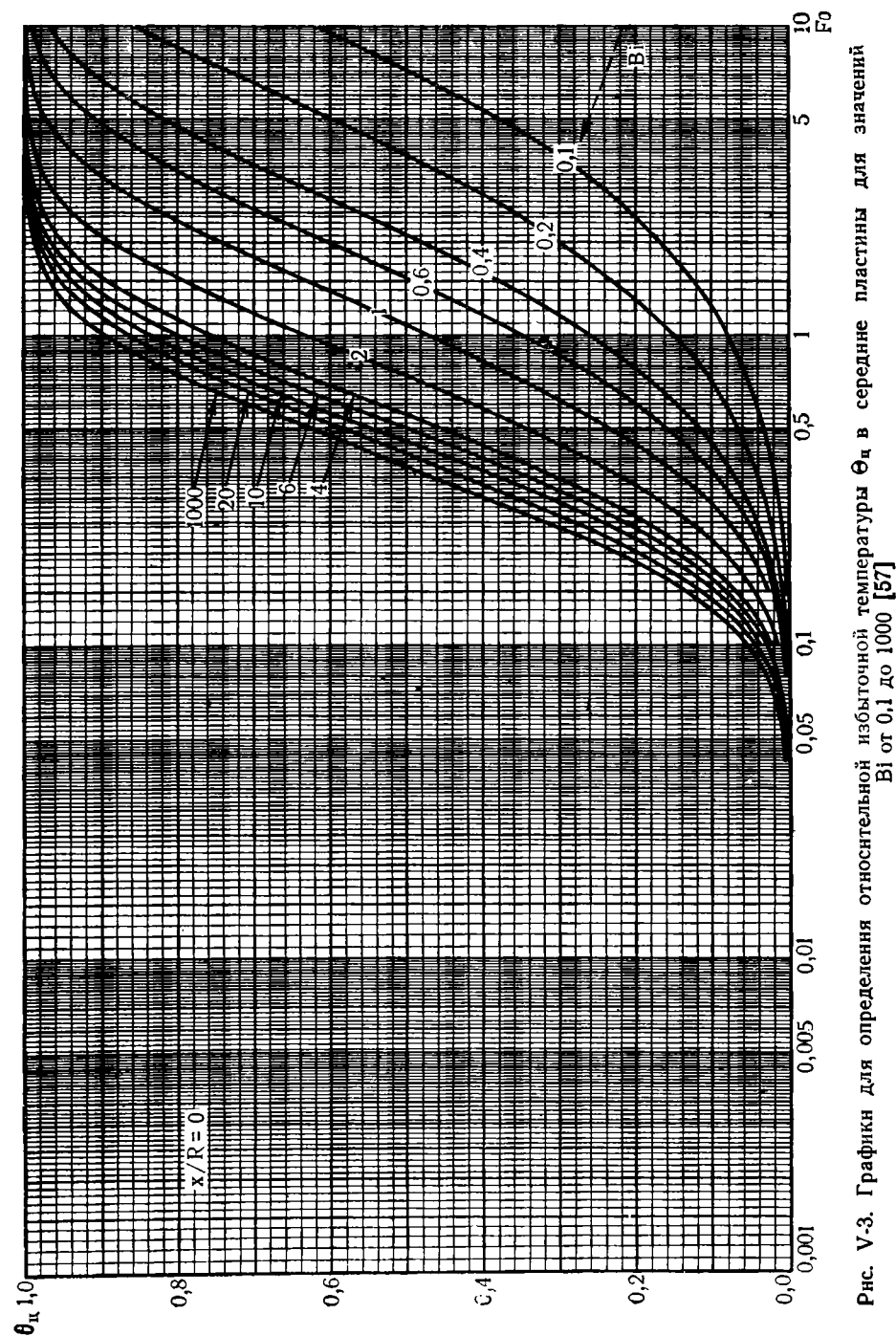


Рис. V-3. Графики для определения относительной избыточной температуры Θ в середине пластины для значений Bi от 0.1 до 100 [57]

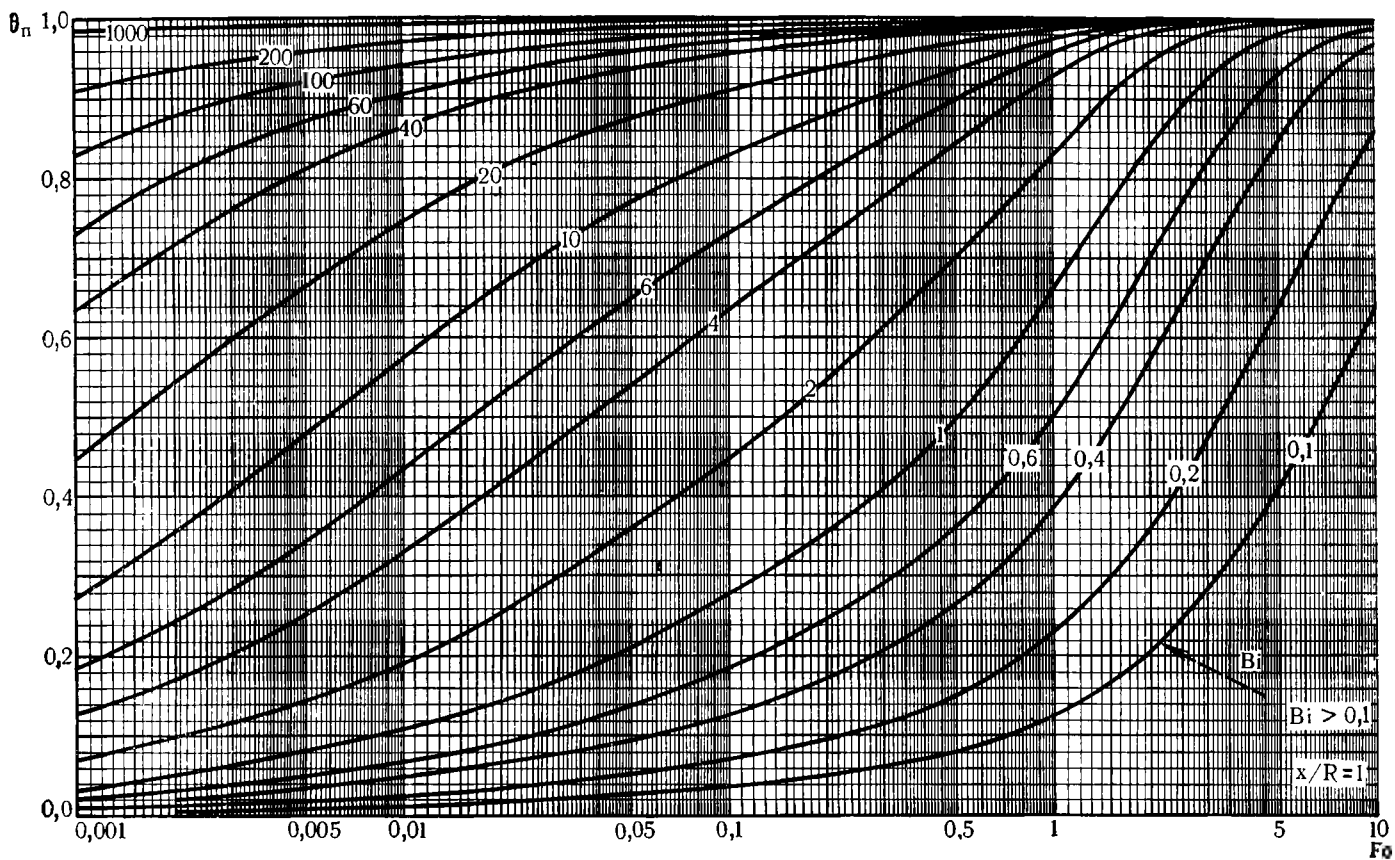


Рис. V-4. Графики для определения относительной избыточной температуры Θ_n на поверхности пластины для значений Bi от 0,1 до 1000 [57]

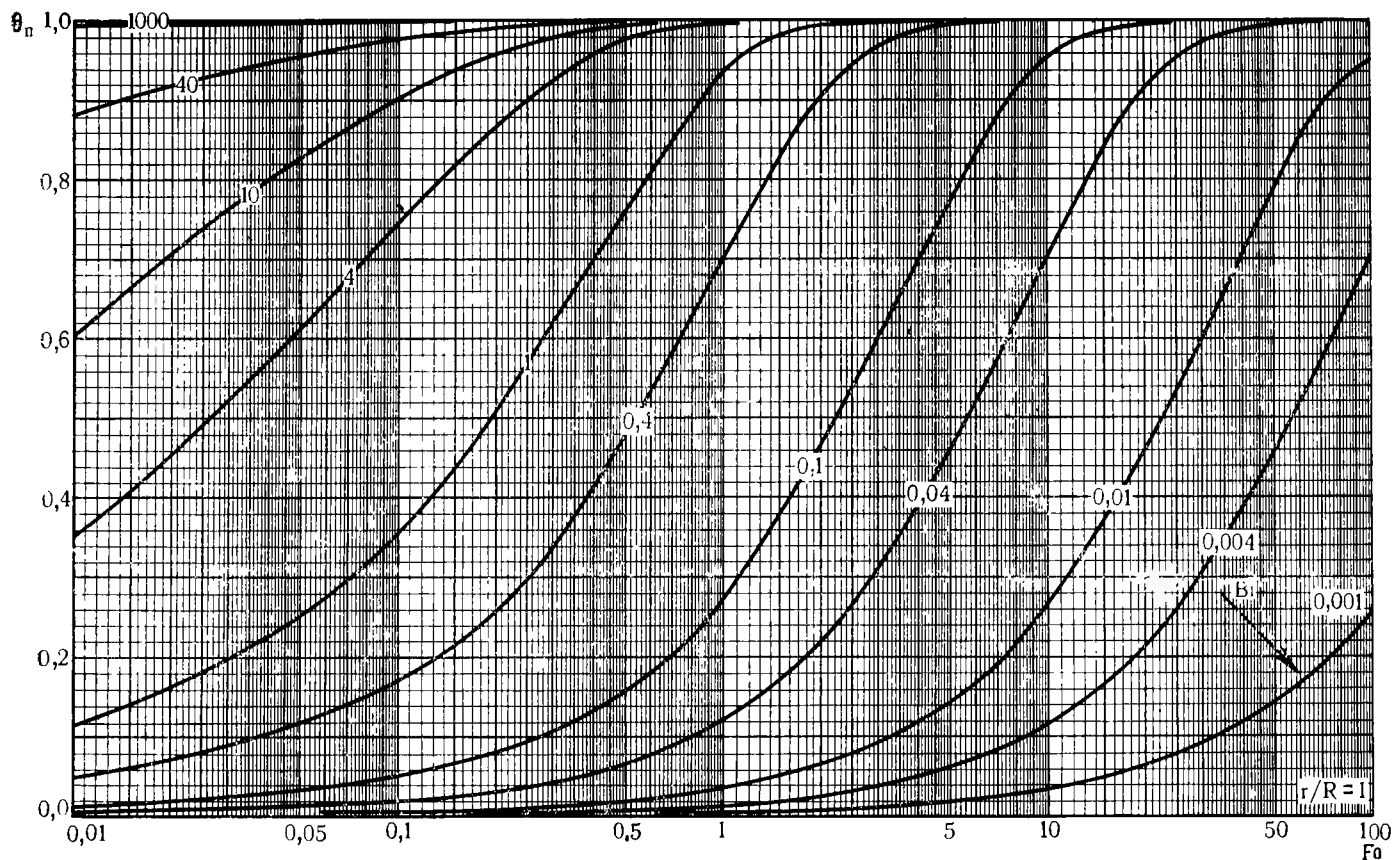


Рис. V-5. Графики для определения относительной избыточной температуры на поверхности шара [57]

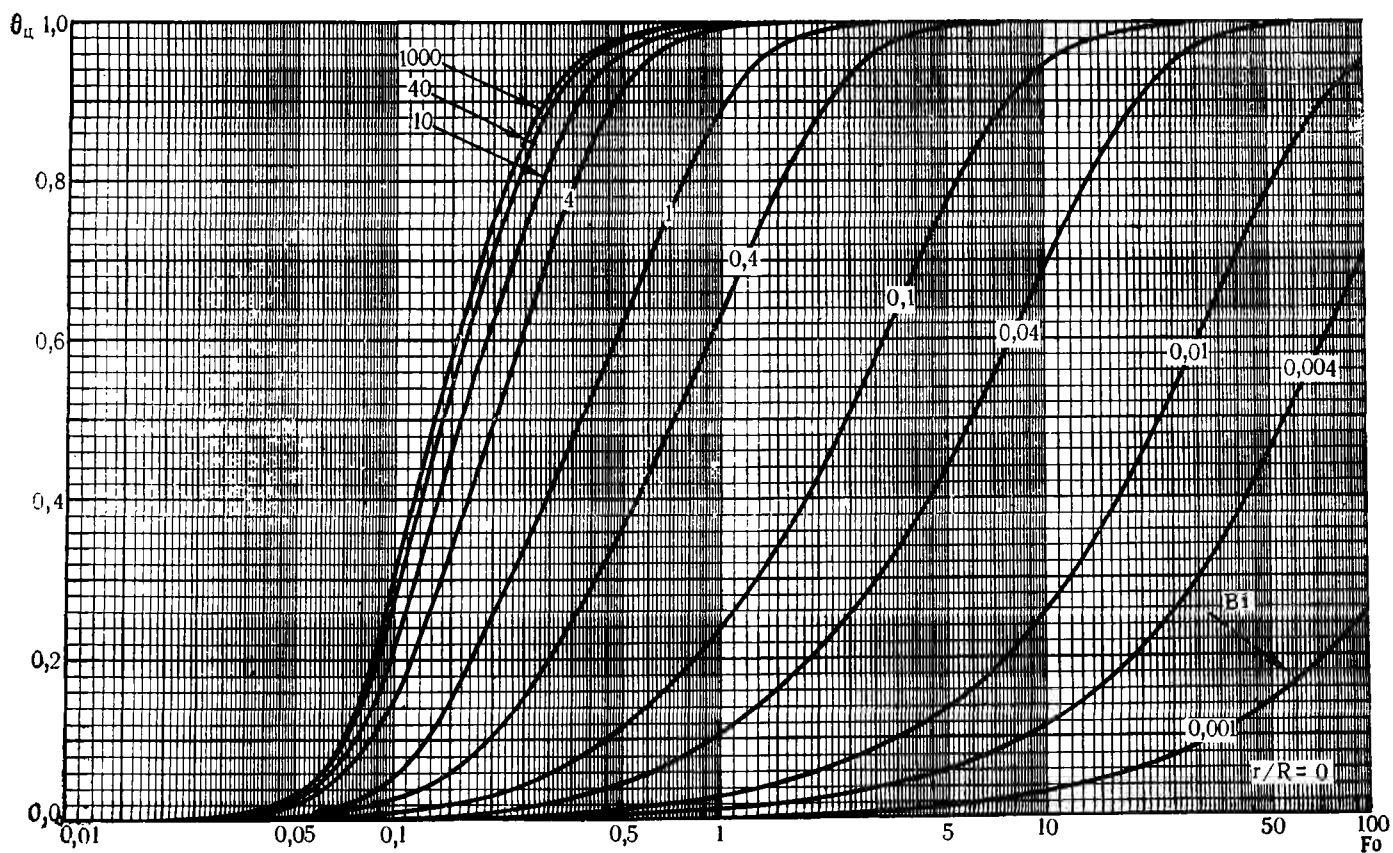


Рис. V-6. Графики для определения относительной избыточной температуры в центре шара [57]

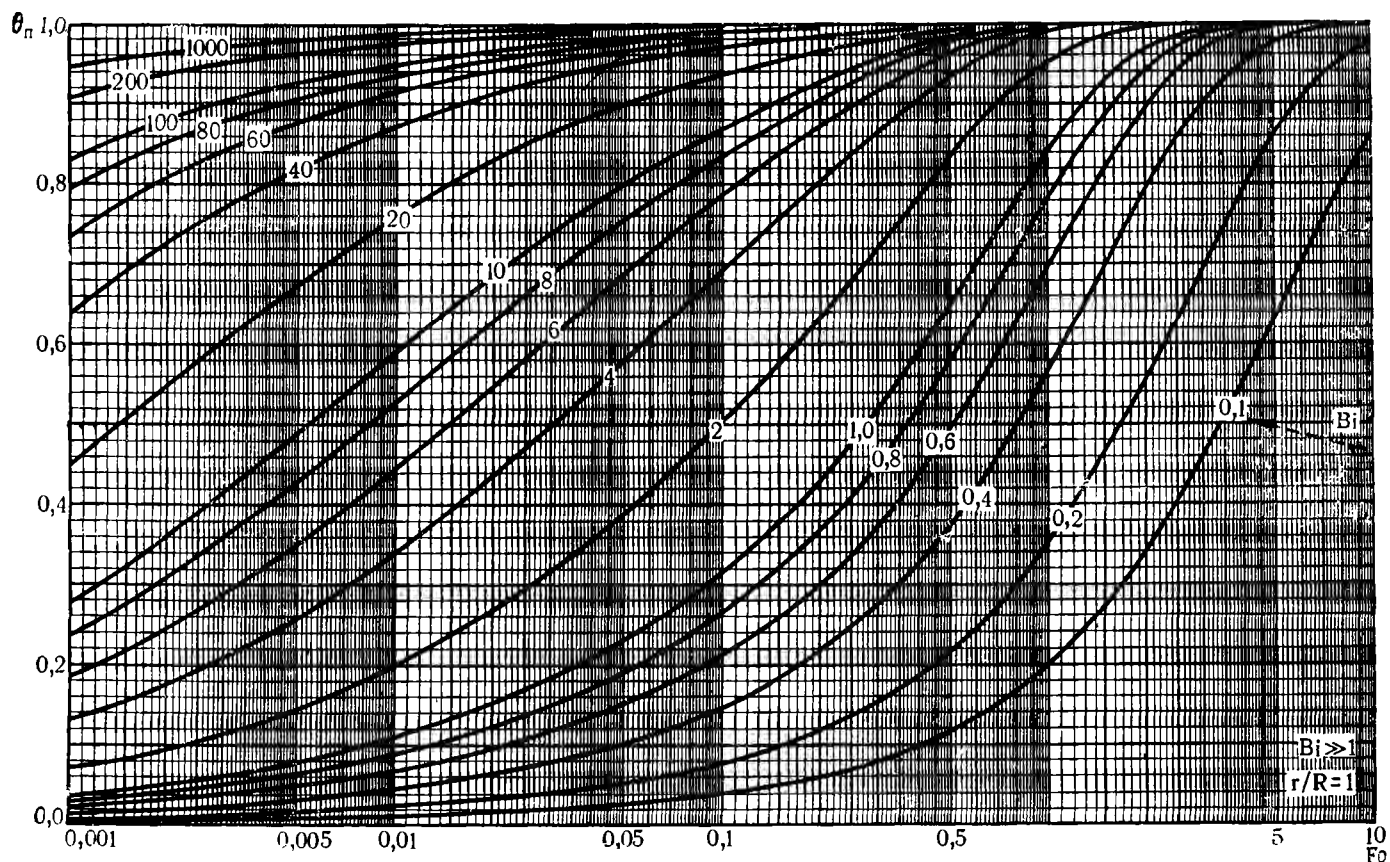


Рис. V-7. Графики для определения относительной избыточной температуры $\theta_{ц}$ на поверхности цилиндра для значений Bi от 0,1 до 1000 [57]

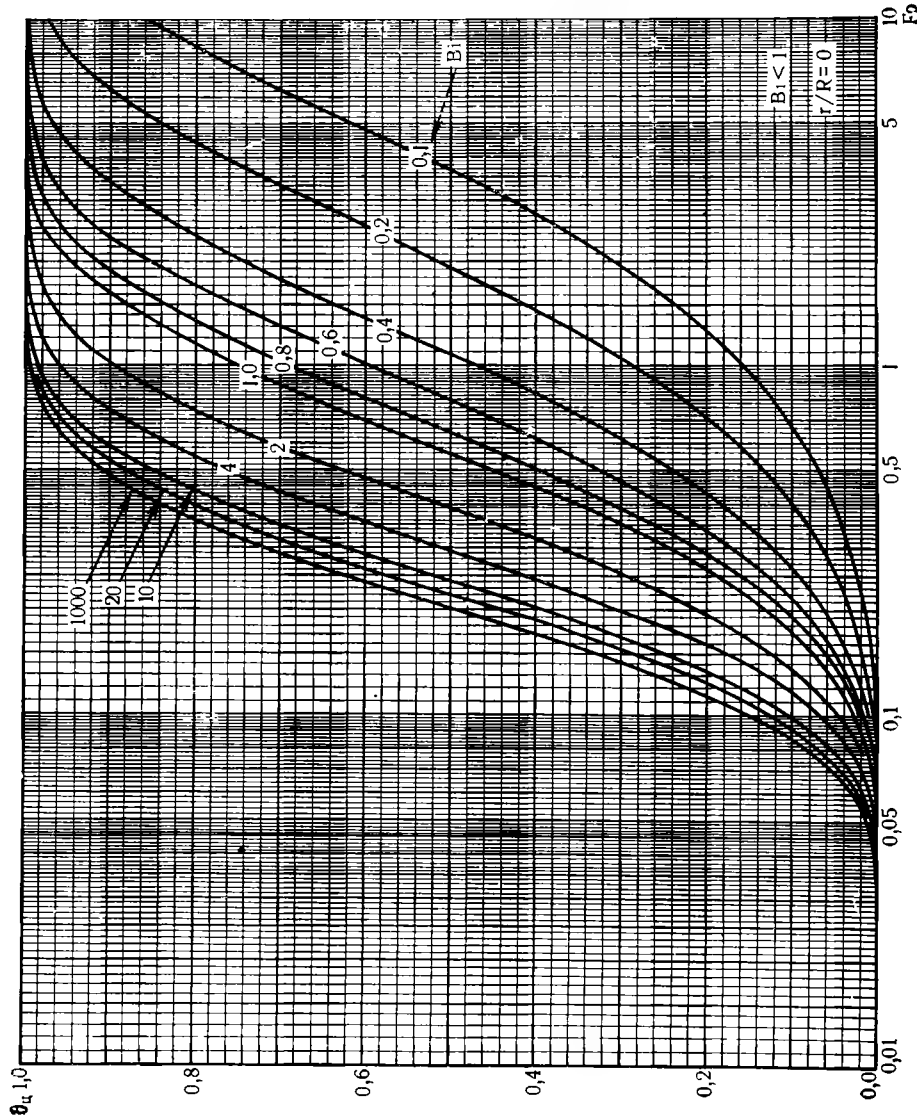


Рис. V-8. Графики для определения относительной избыточной температуры Θ_0 в центре цилиндра для значе-

должны быть известны). Далее из точки на горизонтальной оси номограммы с абсциссой, равной Fo , восстанавливают перпендикуляр до пересечения с линией, соответствующей величине полученного Bi , — ордината точки пересечения и будет искомой безразмерной температурой Θ .

Продолжим анализ решения (V-24).

С л у ч а й $Bi \rightarrow \infty$. При заданных материале λ и размере стенки l условие $Bi \rightarrow \infty$ эквивалентно $\alpha \rightarrow \infty$, а это означает, что тепловое сопротивление переходу теплоты от стенки к жидкости $1/\alpha$ равно нулю. Значит температуры наружных поверхностей стенки и жидкости в течение всего процесса охлаждения остаются равными друг другу. В этих условиях (V-18)

$$P_i = (2n-1) \frac{\pi}{2},$$

а коэффициент A_i (V-25) равен

$$A_i = \frac{2 \sin P_i}{P_i + \sin P_i \cos P_i} = \frac{2 \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right]}{(2n-1) \frac{\pi}{2} + \sin (2n-1) \frac{\pi}{2} \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right]} = (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1) \pi}, \quad (V-30)$$

так как $\cos(2n-1) \frac{\pi}{2} = 0$.

Решение для рассматриваемого случая получим, подставив значение A_i из (V-30) в (V-24), т. е.

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1) \pi} \cos \left(\frac{(2n-1) \pi}{2} \frac{x}{l} \right) \times \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \frac{a \tau}{l^2} \right]. \quad (V-31)$$

Определим скорость изменения температуры стенки в направлении оси x (интенсивность охлаждения)

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right) = \frac{a}{l^2} \sum P_i^2 A_i \cos P_i \frac{x}{l} \exp \left(-P_i^2 \frac{a \tau}{l^2} \right). \quad (V-32)$$

Из (V-32) следует, что интенсивность охлаждения данной стенки (характер $\vartheta = f(x)$) определяется коэффициентом теплопроводности a .

С л у ч а й очень малых значений критерия Био ($Bi < 0,1$). Если $Bi \rightarrow 0$, то согласно (V-19) $P_i \rightarrow (n-1)\pi$,

при этом все коэффициенты A_i ряда (V-24) будут равны нулю, кроме первого, который будет равен

$$A_1 = \lim_{P_1 \rightarrow 0} \left[\frac{2 \frac{\sin P_1}{P_1}}{1 + \cos P_1 \frac{\sin P_1}{P_1}} \right] = 1.$$

При $P_1 \rightarrow 0$ можно $\operatorname{tg} P_1$ заменить P_1 ; тогда из (V-16) получим $P_1^2 = \text{Bi}$

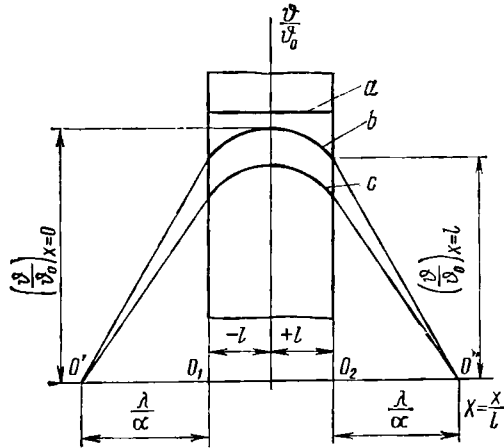


Рис. V-9. Распределение температуры $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f(X, \frac{\alpha\tau}{l^2}, \text{Bi})$ для случая $0 < \text{Bi} < \infty$ при охлаждении пластины:
 $a - \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = 1, \tau_0 = 0, F_{00} = 0;$
 $b - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)_1 < 1, \tau_1 > \tau_0, F_{01} > F_{00};$
 $c - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)_2 < \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)_1, \tau_2 > \tau_1, F_{02} > F_{01}.$

и решение (V-24) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta}{\vartheta_0} &= \cos\left(P_1 \frac{x}{l}\right) \exp\left(-P_1^2 \frac{\alpha\tau}{l^2}\right) = \\ &= \cos\left(\sqrt{\text{Bi}} \frac{x}{l}\right) \exp\left(-\text{Bi} \frac{\alpha\tau}{l^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{V-33})$$

Интенсивность охлаждения для рассматриваемого случая равна

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right) = \frac{\alpha}{c\rho l} \cos \sqrt{\text{Bi}} \frac{x}{l} \left(-\exp \frac{\alpha\tau}{l^2} \right). \quad (\text{V-34})$$

С л у ч а й $0 < \text{Bi} < \infty$. Этот случай занимает промежуточное положение между двумя рассмотренными. Интенсивность охлаждения стенки определяется отношением интенсивностей двух эффектов — переноса теплоты через пограничный слой (теплообмен на поверхности стенки) и переноса теплоты материалом стенки (теплопроводность внутри тела).

Распределение безразмерной температуры $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ в стенке по безразмерной координате $X = \frac{x}{l}$ и по критерию Фурье $\text{Fo} = \frac{\alpha\tau}{l^2}$ при охлаждении для случая $0 < \text{Bi} < \infty$ представлено на рис. V-9. В начальный

момент времени $\tau = 0, \text{Fo} = 0$, температура $\vartheta = \vartheta_0$ (на рис. V-9 позиция a). В последующие моменты времени кривая $\vartheta/\vartheta_0 = f(x, \text{Fo})$ при заданном Bi имеет формы b и c (см. рис. V-9).

Граничное условие 3 к уравнению (V-12) на поверхности стенки для некоторого момента времени $\tau > 0$ при $x = l$ и $X = 1$ имеет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta$$

или

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\vartheta}{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

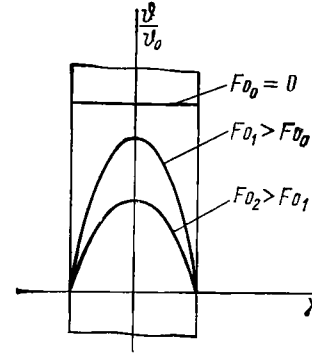


Рис. V-10. Распределение температуры $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f(X)$ по толщине плоской стенки при ее охлаждении для случая $\text{Bi} \rightarrow \infty$

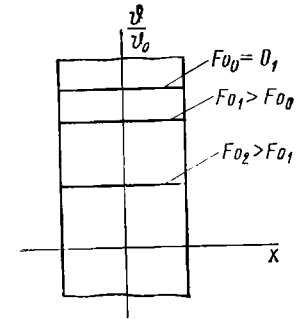


Рис. V-11. Распределение температуры $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f(X)$ по толщине плоской стенки при ее охлаждении для случая $\text{Bi} \rightarrow 0$

Значит, если в точке $x = -l$ к кривой $\vartheta/\vartheta_0 = f(\tau)$ провести касательную, то подкасательная будет равна

$$O_1 O' = \frac{\lambda}{\alpha},$$

аналогично

$$O_2 O'' = \frac{\lambda}{\alpha},$$

причем длина подкасательной остается неизменной для любого $\tau > 0$. Используя это положение и определив температуры $(\vartheta/\vartheta_0)_{x=0}$ и $(\vartheta/\vartheta_0)_{x=1}$ для заданных Bi и Fo , например, по номограммам (рис. V-3, V-4), можно построить (приблизительно) график зависимости $\vartheta/\vartheta_0 = f(X)$ (см. рис. V-9). На рис. V-10 и V-11 представлены зависимости

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right) = f' \left(X, \frac{\alpha\tau}{l^2}, \text{Bi} \right)$$

соответственно для случаев

$$\text{Bi} \rightarrow \infty \text{ и } \text{Bi} < 0,1.$$

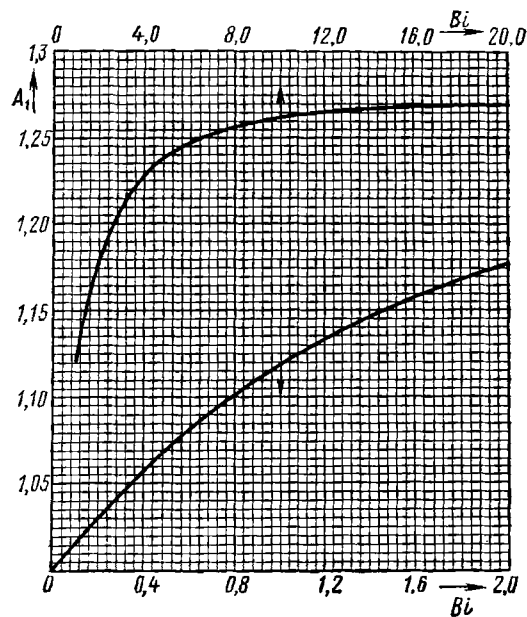


Рис. V-13. Зависимость $A_1=f(Bi)$ для уравнения (V-35) [57]

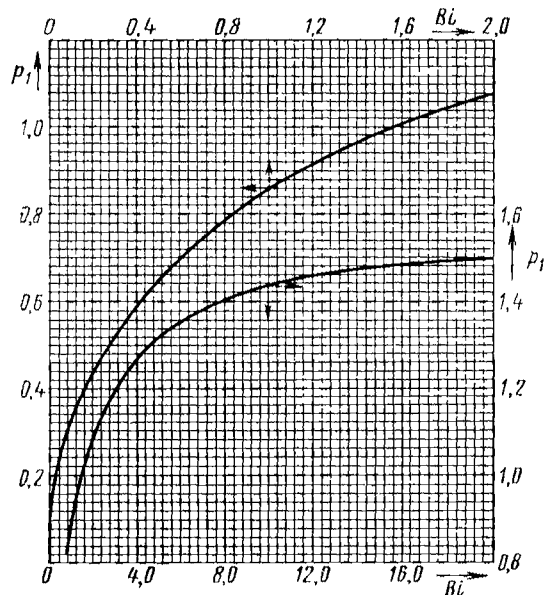


Рис. V-12. Зависимость $P_1=f(Bi)$ для уравнения (V-35) [57]

Продолжим анализ решения (V-24). Величины P_i представляют собой ряд возрастающих чисел

$$P_1 < P_2 < \dots < P_i.$$

Численные значения членов ряда (V-24) быстро уменьшаются с возрастанием номера члена, так как при этом возрастает значение P_i , т. е. ряд (V-24) быстро сходится. Из (V-24) также следует, что для больших чисел Фурье Fo ряд сходится быстрее, чем для малых.

Для инженерных расчетов уже при $Fo \geq 0,3$ в уравнении (V-24) можно ограничиться только первым членом ряда*, при этом оно значительно упростится и примет вид

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = A_1 \cos P_1 \frac{x}{l} e^{-P_1^2 \frac{\alpha \tau}{l^2}}. \quad (V-35)$$

Для определения величин A_1 и P_1 можно воспользоваться графиками $P_1=f(Bi)$ (рис. V-12) и $A_1=f(Bi)$ (рис. V-13) [57].

Определение расхода теплоты. Расход теплоты каждым кубическим метром материала охлаждаемой стенки за время от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_1$ определяют по следующей формуле:

$$Q = c\rho [\vartheta_0 - \bar{\vartheta}(\tau)], \quad (V-36)$$

где $\bar{\vartheta}(\tau)$ — средняя температура по толщине стенки в заданный момент времени $\tau = \tau_1$ (рис. V-14).

Температуру $\bar{\vartheta}(\tau)$ можно найти, если проинтегрировать в пределах от 0 до l функцию (V-24), т. е. найти площадь под кривой $\vartheta(x, \tau_1)$ и разделить результат на l (рис. V-14):

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}(\tau_1) &= \frac{\vartheta_0}{l} \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-P_i^2 \frac{\alpha \tau_1}{l^2}} \cos P_i \frac{x}{l} dx = \\ &= \frac{\vartheta_0}{l} \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-P_i^2 \frac{\alpha \tau_1}{l^2}} \int_0^l \cos P_i \frac{x}{l} dx. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^l \cos P_i \frac{x}{l} dx = \frac{l \sin P_i}{P_i}$$

* Установлено, что можно пользоваться первым числом ряда (V-24) с точностью до 0,25% при $x/l = 0$, $Bi = 1$ и $Fo > 0,55$ [57].

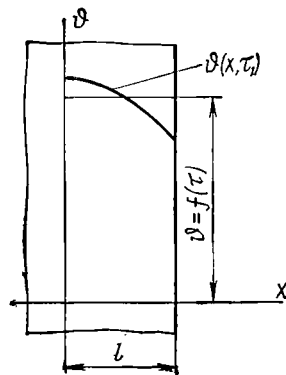


Рис. V-14. К определению средней температуры $\bar{\vartheta}(\tau)$ по толщине стенки для уравнения (V-36)

то, вводя обозначение

$$B_i = \frac{A_i l \sin P_i}{P_i},$$

которое с учетом (V-26) записывается в виде

$$B_i = \frac{2 Bi^2}{P_i (Bi^2 + Bi + P_i^2)},$$

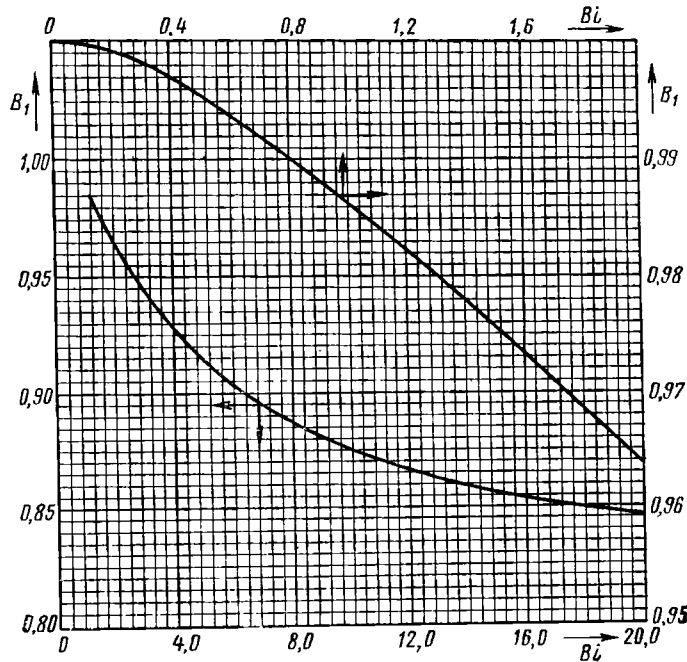


Рис. V-15. Зависимость $B_1 = f(Bi)$ для уравнения (V-38) [57]

окончательно получим

$$\bar{\theta}(\tau_1) = \frac{\theta_0}{l} \sum_{i=1,2}^{\infty} B_i e^{-P_i^2 \frac{\alpha \tau_1}{l^2}}. \quad (V-37)$$

Для инженерных расчетов можно ограничиться первым членом ряда, так что последняя формула упростится и примет вид

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{\theta_0}{l} B_1 e^{-P_1^2 \frac{\alpha \tau_1}{l^2}}, \quad (V-38)$$

где B_1 — коэффициент первого члена ряда уравнения (V-37). Для облегчения расчетов по формуле (V-38) можно пользоваться графиком

$$B_1 = f(Bi),$$

который изображен на рис. V-15.

§ 3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ

Рассмотрим задачу для бесконечного твердого тела с заданным начальным распределением, когда температура меняется только в одном направлении x .

Для определения температурного поля в любой момент времени $\tau > 0$ ($T_{\tau>0} = f(x, \tau)$) требуется решить уравнение (V-1)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

с начальным условием

$$T_{\tau=0} = F(x).$$

Ранее (в § 2) было показано, что функция

$$T = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} \quad (V-39)$$

удовлетворяет уравнению и начальному условию.

Для выяснения физического смысла постоянной C , входящей в уравнение (V-39), определим количество теплоты Q , содержащейся в бесконечном параллелепипеде (вдоль оси x) с основанием $dydz$. Элементарный объем такого параллелепипеда содержит (заштрихован на рис. V-16, а) количество теплоты

$$dQ = cp dy dz T d(\xi - x),$$

а количество теплоты, содержащееся в бесконечном параллелепипеде, равно интегралу от последнего выражения

$$Q = cp dy dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} d(\xi - x) = cp dy dz C. \quad (V-40)$$

Из уравнения (V-40) следует, что величина C равна площади под кривой (V-39) и имеет размерность $[C] = \text{град} \cdot \text{м}$.

Из (V-39) видно, что в зависимости от времени τ кривая $T = f(\tau)$ тем круче, чем меньше время τ (рис. V-16, б). При переходе к пределу $\tau \rightarrow 0$ в (V-39) площадь под кривой сохраняется.

Начальную температуру $T_{\tau=0}$ можно рассматривать как высоту элементарной площади с основанием $d\xi$ (рис. V-17), но площадь такой

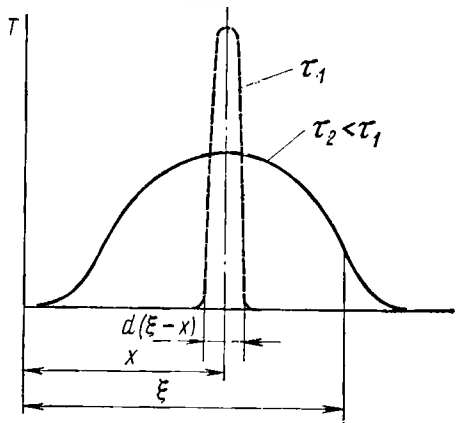
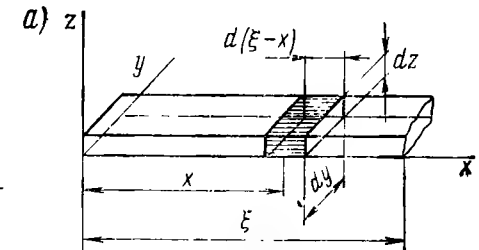


Рис. V-16. К определению постоянной C в уравнении (V-39)

площадки равна постоянной C . Используя (V-40) и учитывая, что для элементарной площадки следует взять dQ вместо Q , получим

$$C = \frac{dQ}{c\rho dy dz} = T_{\tau=0} d\xi = F(\xi) d\xi.$$

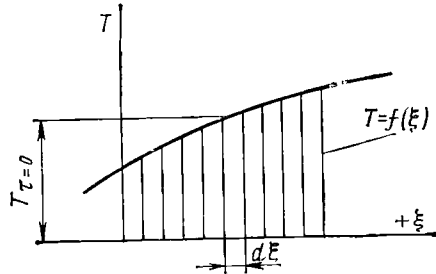


Рис. V-17. К уравнению (V-40)

Теперь постоянную C можно рассматривать как мощность плоского источника теплоты в момент времени $\tau = 0$, расположенного в плоскости, перпендикулярной оси x для $x = \xi$.

Подставим значение постоянной C (в (V-39)), в результате получим решение (V-1) в другой форме

$$T = \frac{F(\xi)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} d\xi. \quad (V-41)$$

Общее решение уравнения (V-1) запишется в виде интеграла от частных решений вида (V-41).

Известно, что общее решение линейного дифференциального уравнения (V-1) является суммой

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} d\xi. \quad (V-42)$$

Произведем замену переменной в (V-42)

$$\frac{\xi-x}{\sqrt{4a\tau}} = \beta \text{ или } \xi = x + \beta \sqrt{4a\tau}, \quad d\xi = \sqrt{4a\tau} d\beta, \quad (V-43)$$

после чего (V-42) примет вид

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + \beta \sqrt{4a\tau}) e^{-\beta^2} \sqrt{4a\tau} d\beta$$

или

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + \beta \sqrt{4a\tau}) e^{-\beta^2} d\beta. \quad (V-44)$$

Теперь покажем, что (V-44) удовлетворяет не только уравнению (V-1), но и начальному условию [при $\tau = 0$, $T = F(x)$]. При $\tau = 0$ функция F равна

$$F(x + \beta \sqrt{4a\tau}) = F(x)$$

и (V-44) имеет вид

$$T(x, \tau = 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} F(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta.$$

Но так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta = \sqrt{\pi},$$

то

$$T(x, \tau = 0) = F(x)$$

и значит функция (V-44) удовлетворяет начальному условию.

§ 4. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ТЕЛЕ С ОДНОМЕРНЫМ ПОЛЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ (ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА)

Рассмотрим теплопроводность в теле, простирающемся неограниченно в направлении осей $\pm y$; $\pm z$ и $+x$ и ограниченном плоскостью, перпендикулярной оси x при $x = 0$; будем называть такое тело **п о л у о г р а н и ч е н н ы м**. Для определения температурного поля необходимо решить уравнение (V-1) с начальным условием

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 = \text{const}$$

и граничным условием

$$T(0, \tau) = T_w = 0.$$

Температура T_w принимается за начало отсчета.

Требуется найти зависимость

$$\frac{T}{T_0} = F(x, \tau).$$

Определим искомую зависимость, используя решение (V-42), полученное для неограниченного тела. Для этого продолжим в отрицательном направлении функцию $F(x)$, причем начальную температуру $F(-x)$ положим равной $-F(x)$. При таком продолжении $F(x = 0) = 0$ условие на поверхности выполняется и решение для $x > 0$ тождественно совпадает с решением исходной задачи (рис. V-18).

Представим интеграл (V-42) в виде суммы двух членов

$$T = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \left[\int_{-\infty}^0 F(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} d\xi + \int_0^{+\infty} F(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} d\xi \right]. \quad (V-45)$$

Заменяя в первом члене (V-45) x на $-x$ и учитывая, что $F(-x) = -F(x)$, получим

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \left[- \int_{\xi=-\infty}^{\xi=0} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} d\xi + \int_{\xi=0}^{\xi=+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} d\xi \right]. \quad (V-46)$$

Произведя в (V-46) замену переменной из (V-43), имеем

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\beta=\frac{-x}{\sqrt{4a\tau}}}^{\beta=+\infty} e^{-\beta^2} d\beta - \int_{\beta=-\infty}^{\beta=\frac{-x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta \right]. \quad (V-47)$$

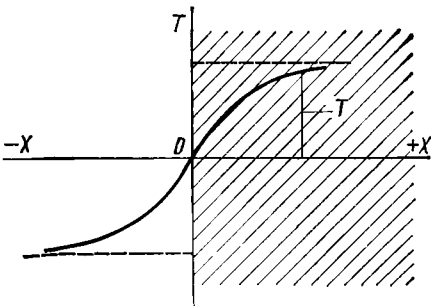


Рис. V-18. Распределение температуры в полуограниченном теле

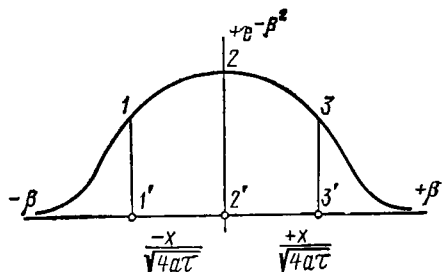


Рис. V-19. Зависимость $\pm\beta = f(e^{-\beta^2})$ для уравнения (V-47)

График $f(\pm\beta) = e^{-\beta^2}$ представлен на рис. V-19. Разность членов в квадратных скобках (V-47) равна площади 123'2'I'1. Интеграл (V-47) можно представить в форме (рис. V-19)

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta=\frac{-x}{\sqrt{4a\tau}}}^{\beta=\frac{+x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta, \quad (V-48)$$

где интеграл также равен площади 123'2'I'1, которую можно представить как сумму равных площадей: пл. 122'1'I'1 + пл. 233'2'2 = = 2 пл. 233'2'2 и в соответствии с этим переписать (V-48) в следующей форме:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta=0}^{\beta=\frac{+x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta, \quad (V-49)$$

где интеграл является функцией верхнего предела.

Уравнение (V-49) является искомым решением.

Введем символ, который обычно называют функцией ошибок Гаусса

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\beta^2} d\beta.$$

Тогда решение (V-49) можно представить в форме

$$\frac{T}{T_0} = \operatorname{erf} \left(\frac{+x}{\sqrt{4a\tau}} \right). \quad (V-50)$$

Значения $\operatorname{erf} z$ для различных z приведены в табл. V-1.

Таблица V-1

Функция ошибок или интеграл ошибок [92]

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\beta^2} d\beta$$

z	$\operatorname{erf} z$	z	$\operatorname{erf} z$	z	$\operatorname{erf} z$	z	$\operatorname{erf} z$
0,00	0,00000	0,66	0,64938	1,30	0,93401	1,94	0,99392
0,02	0,09253	0,68	0,66378	1,32	0,93807	1,96	0,99443
0,04	0,04511	0,70	0,67780	1,34	0,94191	1,98	0,99489
0,06	0,06762	0,72	0,69143	1,36	0,94556	2,00	0,99532
0,08	0,09008	0,74	0,70468	1,38	0,94902	2,05	0,99626
0,10	0,11246	0,76	0,71751	1,40	0,95229	2,10	0,99702
0,12	0,13476	0,78	0,73001	1,42	0,95538	2,15	0,99764
0,14	0,15695	0,80	0,74210	1,44	0,95830	2,20	0,99814
0,16	0,17901	0,82	0,75381	1,46	0,96105	2,25	0,99854
0,18	0,20094	0,84	0,76514	1,48	0,96365	2,30	0,99886
0,20	0,22270	0,86	0,77610	1,50	0,96611	2,35	0,9991107
0,22	0,24430	0,88	0,78669	1,52	0,96841	2,40	0,9993115
0,24	0,26570	0,90	0,79691	1,54	0,97059	2,50	0,9995930
0,26	0,28690	0,92	0,80677	1,56	0,97263	2,60	0,9997640
0,28	0,30788	0,94	0,81627	1,58	0,97455	2,70	0,9998657
0,30	0,32863	0,96	0,82542	1,60	0,97635	2,80	0,9999250
0,32	0,34913	0,98	0,83423	1,62	0,97804	2,90	0,9999589
0,34	0,36936	1,00	0,84270	1,64	0,97962	3,00	0,9999779
0,36	0,38933	1,02	0,85084	1,66	0,98110	3,10	0,9999884
0,38	0,40901	1,04	0,85865	1,68	0,98249	3,20	0,9999940
0,40	0,42839	1,06	0,86614	1,70	0,98379	3,30	0,9999969
0,42	0,44747	1,08	0,87333	1,72	0,98500	3,40	0,9999985
0,44	0,46623	1,10	0,88020	1,74	0,98613	3,50	0,99999925691
0,46	0,48466	1,12	0,88679	1,76	0,98719	3,60	0,99999964414
0,48	0,50275	1,14	0,89308	1,78	0,98817	3,70	0,99999983285
0,50	0,52050	1,16	0,89910	1,80	0,98909	3,80	0,99999992300
0,52	0,53790	1,18	0,90484	1,82	0,98994	3,90	0,99999996521
0,54	0,55494	1,20	0,91031	1,84	0,99074	4,00	0,99999998458
0,56	0,57162	1,22	0,91553	1,86	0,99147	4,20	0,99999999714
0,58	0,58792	1,24	0,92051	1,88	0,99216	4,40	0,99999999951
0,60	0,60386	1,26	0,92524	1,90	0,99279	4,60	0,99999999992
0,62	0,61941	1,28	0,92973	1,92	0,99338	4,80	0,99999999999
0,64	0,63459						1,0

Определение расхода теплоты. Количество теплоты dQ , которое переходит от полуограниченного тела через площадку $dydz$ (рис. V-20) за время $d\tau$ в среду, омывающую поверхность YZ , равно

$$dQ = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} dy dz d\tau. \quad (V-51)$$

В результате дифференцирования выражения (V-49) получим

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta=0}^{\beta=\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta \right) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a\tau}};$$

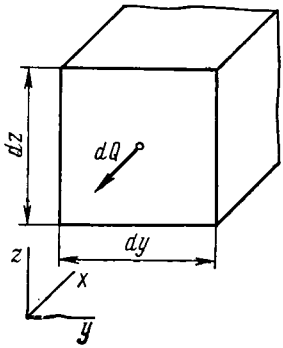


Рис. V-20. К определению расхода теплоты полуограниченным телом (уравнение V-53)

для $x = 0$ последнее выражение примет вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}}. \quad (V-52)$$

С учетом (V-52) выражение для расхода теплоты в единицу времени через поверхность YZ имеет вид

$$\frac{dQ}{d\tau} = -\lambda \frac{T_0}{\sqrt{\pi a \tau}} dy dz. \quad (V-53)$$

Выражение для расхода теплоты за отрезок времени τ_1 через поверхность YZ получим, интегрируя (V-52)

$$Q = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \sqrt{\tau_1} T_0 dy dz.$$

Заменяя a его значением

$$a = \frac{\lambda}{c\rho},$$

получим

$$Q = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda c \rho} \sqrt{\tau_1} T_0 dy dz, \quad (V-54)$$

где величина $\sqrt{\lambda c \rho}$ представляет собой физическую константу, характеризующую способность вещества аккумулировать теплоту.

§ 5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕЛА ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

Рассмотрим охлаждение параллелепипеда (рис. V-21) конечных размеров $2l_x, 2l_y, 2l_z$ из изотропного материала, с начальной температурой T_0 , одинаковой во всех точках его объема [32]. В момент времени $\tau \Rightarrow 0$ параллелепипед погружается в жидкость с температурой $T_f < T_0$, которая остается неизменной в течение всего процесса охлаждения,

так же как и коэффициент теплоотдачи α . При таких условиях температурное поле симметрично относительно центра параллелепипеда. Поместим туда начало координат. Математическая формулировка задачи будет состоять из дифференциального уравнения теплопроводности (II-54)

$$\frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a \nabla^2 T(x, y, z, \tau)$$

и краевых условий:

а) начальных

при $\tau = 0$,

$$T(x, y, z) = T_0 = \text{const};$$

б) граничных

$$\tau > 0, \quad \pm \lambda \left[\frac{\partial \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial x} \right]_{x=\mp l_x} = \alpha \vartheta(x, y, z, \tau)_{x=\mp l_x},$$

$$\mp \lambda \left[\frac{\partial \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial y} \right]_{y=\mp l_y} = \alpha \vartheta(x, y, z, \tau)_{y=\mp l_y},$$

$$\mp \lambda \left[\frac{\partial \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial z} \right]_{z=\mp l_z} = \alpha \vartheta(x, y, z, \tau)_{z=\mp l_z}.$$

и

$$\left(\frac{\partial \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial z} \right)_{z=0} = 0,$$

для

$$-l_x < x < +l_x,$$

$$-l_y < y < l_y,$$

$$-l_z < z < l_z.$$

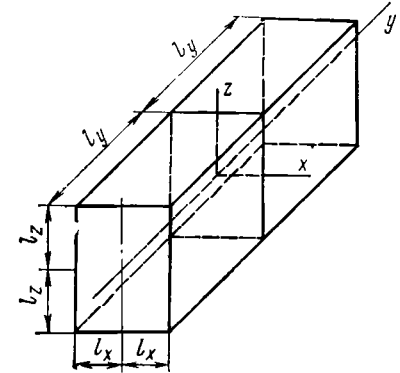


Рис. V-21. Теплопроводность тела ограниченных размеров

(Здесь приняты обозначения $\vartheta(x, y, z, \tau) = T(x, y, z, \tau) - T_f$, $\vartheta_0 = (T_0 - T_f)$)

Требуется найти распределение температуры

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f(x, y, z, \tau).$$

Доказано [57], что искомую функцию можно представить как произведение трех функций, каждую из которых можно написать на основании решения (V-24) для неограниченной стенки, если представить

параллелепипед как пересечение трех таких стенок. Искомая функция имеет вид

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0} \cdot \frac{\vartheta(y, \tau)}{\vartheta_0} \cdot \frac{\vartheta(z, \tau)}{\vartheta_0}, \quad (V-55)$$

где

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0}, \quad \frac{\vartheta(y, \tau)}{\vartheta_0}, \quad \frac{\vartheta(z, \tau)}{\vartheta_0}$$

— распределения температуры в неограниченных плоскостях YZ , XZ , XY .

Решение рассматриваемой задачи на основании (V-55) и (V-24) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta(x, y, z, \tau)}{\vartheta_0} = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{i, x} A_{m, y} A_{k, z} \times \\ & \times \cos P_{i, x} \frac{x}{l_x} \cos P_{m, y} \frac{y}{l_y} \cos P_{k, z} \frac{z}{l_z} \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{P_{i, x}^2}{l_x^2} + \frac{P_{m, y}^2}{l_y^2} + \frac{P_{k, z}^2}{l_z^2} \right) a \tau \right], \end{aligned} \quad (V-56)$$

где $A_{i, x}$, $A_{m, y}$, $A_{k, z}$ — коэффициенты ряда (V-25) соответственно для решений

$$\vartheta(x, \tau) \quad \text{и} \quad Bi = \frac{\alpha}{\lambda} l_x,$$

$$\vartheta(y, \tau) \quad \text{и} \quad Bi = \frac{\alpha}{\lambda} l_y,$$

$$\vartheta(z, \tau) \quad \text{и} \quad Bi = \frac{\alpha}{\lambda} l_z.$$

Если ограничиться только первыми членами в рядах (V-35), то формула (V-56) значительно упростится и примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta(x, y, z, \tau)}{\vartheta_0} = & A_{1, x} A_{1, y} A_{1, z} \cos \left(P_{1, x} \frac{x}{l_x} \right) \cos \left(P_{1, y} \frac{y}{l_y} \right) \times \\ & \times \cos \left(P_{1, z} \frac{z}{l_z} \right) \exp \left[- \left(\frac{P_{1, x}^2}{l_x^2} + \frac{P_{1, y}^2}{l_y^2} + \frac{P_{1, z}^2}{l_z^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (V-57)$$

Коэффициенты $A_{1, x}$, $A_{1, y}$, $A_{1, z}$ и корни характеристического уравнения $P_{1, x}$, $P_{1, y}$, $P_{1, z}$ можно определять по графикам (см. рис. V-12 и V-13) соответственно для

$$Bi_x = \frac{\alpha}{\lambda} l_x, \quad Bi_y = \frac{\alpha}{\lambda} l_y, \quad Bi_z = \frac{\alpha}{\lambda} l_z.$$

Определение расхода теплоты. Расход теплоты каждым кубическим метром материала параллелепипеда (см. рис. V-21) за время от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_1$ определяют по следующей формуле:

$$Q = c \rho [\vartheta_0 - \bar{\vartheta}(\tau)],$$

где $\bar{\vartheta}(\tau)$ — средняя температура параллелепипеда в заданный момент времени $\tau = \tau_1$, которую определяют из соотношения

$$\bar{\vartheta}(\tau) = \frac{1}{l_x l_y l_z} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \vartheta(x, y, z, \tau) dx dy dz. \quad (V-58)$$

Формулу для определения средней температуры $\bar{\vartheta}(\tau)$ в заданный момент времени τ_1 получим, подставив в (V-58) значение $\vartheta(x, y, z, \tau)$ из (V-57)

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}(\tau) = & \frac{\vartheta_0}{l_x l_y l_z} B_{1, x} B_{1, y} B_{1, z} \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{P_{1, x}^2}{l_x^2} + \frac{P_{1, y}^2}{l_y^2} + \frac{P_{1, z}^2}{l_z^2} \right) a \tau_1 \right]. \end{aligned} \quad (V-59)$$

Коэффициенты $B_{1, x}$, $B_{1, y}$, $B_{1, z}$ и корни характеристических уравнений $P_{1, x}$, $P_{1, y}$, $P_{1, z}$ можно определить по графикам (см. рис. V-12 и V-15) соответственно для

$$Bi_x = \frac{\alpha}{\lambda} l_x, \quad Bi_y = \frac{\alpha}{\lambda} l_y, \quad Bi_z = \frac{\alpha}{\lambda} l_z.$$

ции в отдельных точках (узлах) сетки. Дифференциальное уравнение (IV-49) для этого случая имеет вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{VI-1})$$

Выведем соответствующее ему уравнение в конечных разностях.

На теплопроводящую пластину (рис. VI-1, а), такую же, для которой раньше было найдено температурное поле аналитически (IV-78),

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Выше были приведены примеры решения уравнений теплопроводности (IV-1), (IV-49), (V-1). Из этих примеров видно, что решения эти весьма громоздки даже для одномерных и двумерных уравнений теплопроводности и тел простой формы. На практике встречаются многомерные задачи теплопроводности тел сложной формы, для которых практически невозможно получить аналитические решения.

Нестационарное уравнение теплопроводности для тел сложной формы не всегда возможно решить аналитически даже в случае одномерного поля. В тех случаях, когда задачу нельзя решить аналитически, применяют численные или графические методы и метод аналогии (гл. III, § 4), которые дают приближенные решения.

При аналитическом решении, как известно, из дифференциальных уравнений можно определить температуру в любой точке исследуемого тела.

При численном методе используются алгебраические уравнения, полученные из дифференциальных уравнений, по которым можно определить температуру только в отдельных точках, обычно в узлах сетки.

Неудобство численных методов по сравнению с аналитическими состоит в том, что в первом случае решается только одна конкретная задача и любое изменение параметров требует совершенно нового решения, такого же трудоемкого, как и первое.

Аналитический метод дает семейство решений, зависящих от параметров задачи. Если какие-либо параметры изменены, то получить новый ответ нетрудно, для этого вовсе не требуется проделывать все решения заново. Поэтому всегда следует стремиться получить аналитическое решение, и только в тех случаях, когда это невозможно, нужно решать задачу наиболее подходящим для конкретного случая численным методом или методом аналогии.

§ 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим численный метод решения двумерного стационарного уравнения теплопроводности, называемый методом конечных разностей, или методом сеток. Этот метод основан на замене производных, входящих в дифференциальное уравнение, приближенными значениями, выраженными через разности значений функ-

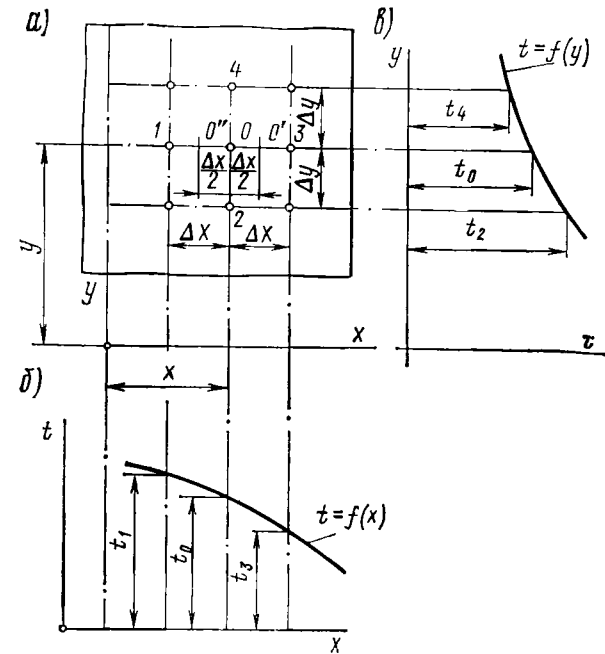


Рис. VI-1. К выводу уравнения (VI-4) теплопроводности в конечных разностях для двумерного температурного поля

нанесена сетка; координаты точки O есть X и Y ; температуры в точке O и узлах сетки $1, 2, 3, 4$ обозначим соответственно t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 (рис. VI-1, а, б).

Градиент температуры в направлении оси x для точки O' (рис. VI-1, а) можно написать в виде

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x+\frac{\Delta x}{2}, y} \cong \frac{t_1 - t_0}{\Delta x},$$

где члены высшего порядка малости не учитываются. Точность последнего равенства возрастает с уменьшением Δx .

Аналогичным образом градиент температуры в направлении точки O'' можно написать в виде

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x-\frac{\Delta x}{2}, y} \cong \frac{t_0 - t_3}{\Delta x}.$$

Теперь можно определить вторую производную в направлении оси x для точки O

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &\cong \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x+\frac{\Delta x}{2}, y} - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x-\frac{\Delta x}{2}, y} \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} (t_1 + t_3 - 2t_0). \end{aligned} \quad (\text{VI-2})$$

Таким же образом можно определить вторую производную в направлении оси y для точки O (рис. VI-1, в)

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)_x \cong \frac{1}{\Delta y^2} (t_2 + t_4 - 2t_0). \quad (\text{VI-3})$$

Подставим значения вторых производных из (VI-2) и (VI-3) в (VI-1) и при условии $\Delta x = \Delta y$ получим

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0) = 0 \quad (\text{VI-4})$$

или

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0 = 0. \quad (\text{VI-5})$$

Из уравнения (VI-5) следует, что температура в любом узле плоской сетки есть среднее арифметическое температур в соседних четырех узлах сетки. Это одно из фундаментальных свойств уравнения Лапласа, следствием которого и является (VI-5).

Условие (VI-5) положено в основу одного из методов численного решения задач теплопроводности, который называют релаксацией. Этот метод состоит в следующем. В узлах сетки записываются ожидаемые, но произвольно выбранные температуры. В общем случае они не будут удовлетворять условию (VI-5). Если t_0 окажется больше среднего арифметического температур t_1, t_2, t_3, t_4 , то это значит, что в точке находится источник теплоты, если меньше, то — сток теплоты. В этих случаях уравнение (VI-5) примет вид

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0 = R_0. \quad (\text{VI-6})$$

Величину R_0 назовем остатком для точки O и запишем в виде

$$R_0 = \frac{q_v}{\lambda} \Delta x^2,$$

где q_v — мощность фиктивного источника (стока) теплоты (гл. IV, § 2) в точке O .

Для всех узлов сетки найдем остаток по уравнению (VI-6).

О том, насколько точно были заданы значения температуры в узлах сетки, можно судить по величине остатка. Там, где остаток окажется наибольшим, значения температуры выбраны наименее удачно, т. е. они больше, чем во всех других узлах отличаются от действительных.

Пусть в точке O величина R наибольшая. Наибольший остаток делят на 4 и добавляют $\frac{1}{4} R_0$ к остаткам соседних четырех точек, а температуру узла, где находился наибольший остаток, увеличивают на $\frac{1}{4}$ первоначального остатка. Из уравнения (VI-6) видно, что теперь остаток в узле O станет равным нулю

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t'_0 = 0,$$

где

$$t'_0 = t_0 + \frac{1}{4} R_0.$$

Остатки в точках 1, 2, 3, 4 увеличатся на $\frac{1}{4} R_0$, например в точке 1

$$R'_1 = R_1 + \frac{1}{4} R_0.$$

Далее все операции нужно повторить для следующего узла с наибольшим остатком. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока все остатки внутренних узлов сетки обратятся в нуль или будут пренебрежимо малы. *Результирующие температуры в узлах сетки составят искомое решение.* Из сказанного следует, что время, затрачиваемое на решение задачи, будет тем меньше, чем удачнее выбраны ожидаемые температуры в узлах сетки. Выбор этих температур удобнее проводить следующим образом. Вначале нужно нанести сетку с крупными ячейками и с малым числом узлов или искомых температур. После решения задачи для крупной сетки нужно уменьшить размеры ячеек, а найденные в предыдущем расчете температуры использовать для предсказания ожидаемых температур в узлах второй — более мелкой сетки. Продолжая этот процесс, можно наилучшим образом предсказать температуры в узлах сетки, выбранной для решения конкретной задачи.

Условие (VI-5) можно распространить на случай трехмерного температурного поля, для которого оно имеет вид

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 - 6t_0 = 0, \quad (\text{VI-7})$$

а схема расположения узлов пространственной решетки дана на рис. VI-2.

Рассмотрим пример использования метода релаксации.

В трубе квадратного сечения (рис. VI-3, а) (размеры даны на рисунке) на внутренней поверхности температура $t_{\text{вн}} = 200^\circ \text{C}$, на наружной $t_{\text{н}} = 0^\circ \text{C}$. Определить температурное поле по толщине стенки.

Заметим, что аналитическое решение данной задачи очень громоздкое. Учитывая симметрию трубы, достаточно рассмотреть одну вось-

мую часть поперечного сечения, т. е. найти температуры в точках a, b, c, d (рис. VI-3, б).

Зададим начальную температуру в этих точках равной 100°C , тогда условие (VI-5) для точки a даст остаток

$$R_a = 0 + 100 + 100 + 0 - 4 \cdot 100 = -200.$$

Разделим остаток $R_a = -200$ на четыре части и к остаткам для точек a_4, b добавим $R_a/4 = -50$; в точках a_1 и a_2 остатки не вычисляют, так как они находятся на границе тела, где температура задана. Добавим к температуре в точке a величину, равную одной четверти остатка, т. е. (-50) градусов.

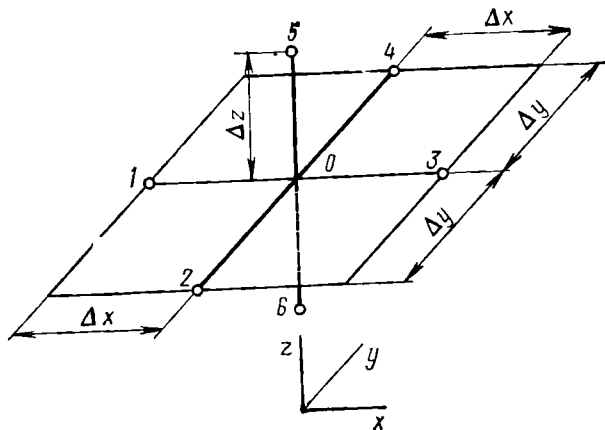


Рис. VI-2. К выводу уравнения теплопроводности в конечных разностях для трехмерного температурного поля

Теперь из условия (VI-5) для точки b можно пересчитать новый остаток $b = 50 + 0 + 100 + 200 - 4 \cdot 100 = -50$. Можно было новый остаток в точке b не считать по (VI-5), так как он равен старому остатку в точке b плюс $\frac{1}{4} R_a$. С остатком и температурой поступим так же, как в предыдущем случае, тогда новая температура в точке b будет равна $87,5^\circ\text{C}$; здесь следует обратить внимание на следующую особенность: остаток $R = -12,5$ добавляют к остатку в точке a , однако полный остаток в точке a будет равен (-25) после этой операции, так как вторая его половина поступит из точки a_4 (рис. VI-3). Тогда из условия (VI-5) для точки a получим $R_a = 0 + 0 + 87,5 + 87,5 - 4 \cdot 50 = -25$. Дальнейшие операции ясны. Когда наибольший остаток станет понижать температуру на доли градуса, расчет при данных размерах ячеек сетки можно считать законченным. Дальнейшее уточнение температурного поля можно получить при уменьшении ячеек сетки. Температуры в точках a, b, c, d даны на рис. VI-3, б.

Рассмотрим еще один пример. Найдем распределение температуры по толщине стенки и потерю теплоты в окружающую среду для нагрева-

тельной печи, поперечное сечение которой с размерами изображено на рис. VI-4, а. Температура внутренней поверхности камеры печи 1000°C , а наружной 0°C . Для решения задачи, с учетом симметрии, достаточно рассмотреть $1/8$ часть поперечного сечения (рис. VI-4, б).

Вначале выберем такой шаг сетки $\Delta x = \sqrt{2A}$, при котором число узловых точек сетки будет минимальным, с тем чтобы в этих точках можно было бы легко найти температуры. В данном случае, в рассмат-

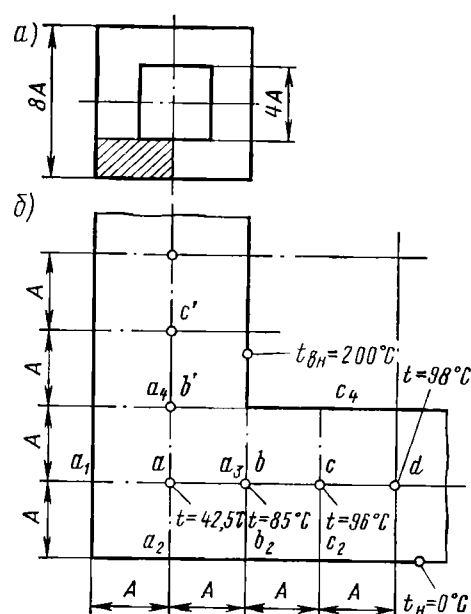


Рис. VI-3. К определению температурного поля в стенке трубы квадратного сечения методом релаксации

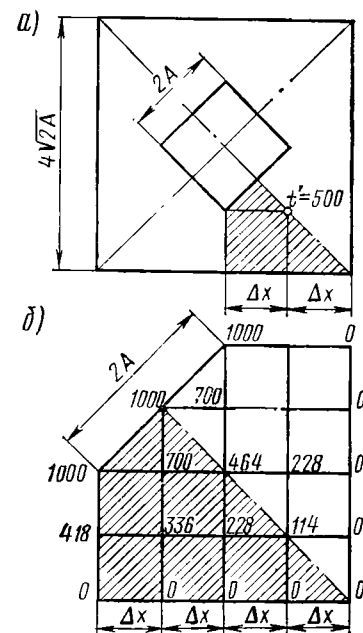


Рис. VI-4. Поперечное сечение нагревательной печи (а); к определению температурного поля в стенке нагревательной печи:

$$\text{шаг сетки } \Delta x = \frac{\sqrt{2A}}{2} \quad (б)$$

риваемой $1/8$ части поперечного сечения будет только одна узловая точка, температуру t' в которой легко найти, используя заданные температуры на границах.

По методу релаксации можно написать $R = 1000 + 1000 + 0 + 0 - 4t' = 0$, при $t' = 500^\circ\text{C}$.

Для уточнения температурного поля уменьшим шаг сетки в два и далее в четыре раза. Распределение температуры в узловых точках для

$\Delta x = \frac{\sqrt{2A}}{2}$ и $\Delta x = \frac{\sqrt{2A}}{4}$ дано на рис. VI-4, б и VI-5, а. Отметим, что при

первом уменьшении шага сетки произошло значительное уточнение температуры, например, температура t' при первой грубой оценке была 500°C , а ее первое уточненное значение стало 464°C ; второе уменьшение шага сетки позволяет найти второе уточненное значение

$t' = 457^\circ \text{C}$, которое уже не так резко отличается от предыдущего. Очевидно, что при $\Delta x \rightarrow 0$ можно получить истинное распределение температуры. На рис. VI-5, а нанесены линии постоянной температуры e (изотермы) и линии постоянного теплового потока q . Эти линии взаимно ортогональны. Заметим, что если бы характер изотерм или линий постоянного теплового потока был бы известен хотя бы приближенно,

то затраты труда и времени на решение задач по методу релаксации резко сократились бы.

В следующем параграфе будет описан способ экспериментального определения линий постоянного теплового потока.

Определение потерь теплоты. На поперечное сечение стенки печи (рис. VI-5, а) нанесем сетку из линий постоянного теплового потока и изотерм так, чтобы образовались криволинейные квадраты типа 1, 2, 3, 4, у которых $\Delta l_a = \Delta l_i$ (рис. VI-5, б). Выделим слой стенки в направлении оси z с толщиной $\Delta z = 1$ (ось z нормальна к плоскости рисунка). Рассмотрим объем $\Delta V = \text{пл. } 1234 \times \Delta z$.

Количество теплоты, проходящее через такой объем, нормально к площадке $\Delta l_a \cdot \Delta z$, равно

$$\lambda (\Delta l_a) \Delta z \cdot \frac{\Delta t}{\Delta l_i}, \quad (\text{VI-8})$$

где $\Delta z = 1$;

Δt — разность температур на двух изотермических поверхностях, ограничивающих рассматриваемый элемент объема;

λ — коэффициент теплопроводности материала стенки печи.

Проводящая теплоту трубка объемом $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \Delta z$ состоит в данном примере из 10 объемов типа ΔV . Трубку можно рассматривать как многослойную стенку, так как при условии постоянства Δt для всех объемов данной трубки из (VI-8) следует, что величина Δq (VI-8), проходящая по ней, будет иметь постоянное значение. Формулу для определения количества теплоты, проходящего через одну трубку, на основании (I-6) и (VI-8) можно представить в виде

$$q_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{S} (t_2 - t_1), \quad (\text{VI-9})$$

где S — число объемов ΔV в данной трубке (в нашем примере $S = 10$);

t_2 — температура на линии ad ;

t_1 — на линии bc (рис. VI-5, а).

Потери теплоты через слои стенки толщиной, равной $\Delta z = 1$, или всеми S трубками (в нашем примере $S = 64$) можно определить по следующей формуле:

$$q_{\text{слой}} = \frac{C}{S} \lambda (t_2 - t_1). \quad (\text{VI-10})$$

§ 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Для решения задач численным методом из дифференциального уравнения теплопроводности (II-54)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{VI-11})$$

следует получить для каждого узла сетки уравнение в конечных разностях. Последнее, как будет показано ниже, представляет собой простое алгебраическое уравнение, из которого легко определить искомую температуру. Первую производную по τ из (VI-11) можно представить в конечных разностях в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \cong \frac{\Delta T}{\Delta \tau} = \frac{T'_0 - T_0}{\Delta \tau}, \quad (\text{VI-12})$$

где T_0 — температура в точке O (см. рис. VI-2) в момент τ ;

T'_0 — температура в этой же точке через промежуток времени $\Delta \tau$.

С учетом полученного соотношения (VI-12), а также (VI-2), (VI-3) и (VI-11) уравнение в конечных разностях имеет вид

$$\frac{T_1 + T_3 - 2T_0}{\Delta x^2} + \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{\Delta y^2} + \frac{T_5 + T_6 - 2T_0}{\Delta z^2} = \frac{T'_0 - T_0}{a \Delta \tau}, \quad (\text{VI-12a})$$

а если $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, то

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 - 6T_0 = \frac{(\Delta x)^2}{a \Delta \tau} (T'_0 - T_0),$$

откуда

$$T'_0 = \frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left[(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6) + \left(\frac{(\Delta x)^2}{a \Delta \tau} - 6 \right) T_0 \right]. \quad (\text{VI-13})$$

Полученная формула позволяет по известной температуре T_0 в данный момент времени τ и в данной точке O и температурам $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ в момент τ (см. рис. VI-2) найти неизвестную температуру T'_0 в той же точке O , но в следующий момент времени $\tau + \Delta \tau$. Таким образом определяют температуры во всех точках сетки в момент $\tau + \Delta \tau$.

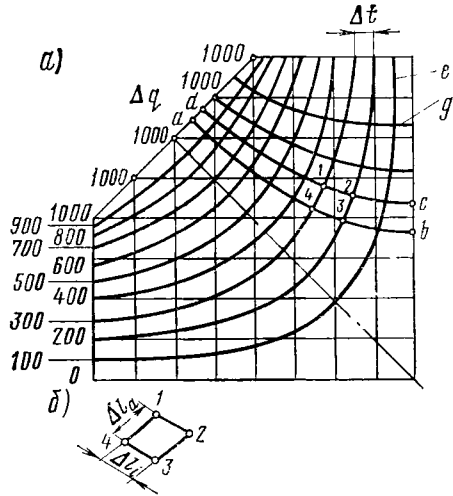


Рис. VI-5. К определению температурного поля в стенке нагревательной печи:

шаг сетки $\Delta x = \frac{\sqrt{2}A}{4}$

Для отыскания температуры в точке O в момент времени $\tau + 2\Delta\tau$ найденную температуру $T'_0(\tau + \Delta\tau)$ принимают за известную и находят $T''_0(\tau + 2\Delta\tau)$. Продолжая такую операцию многократно, находят распределение температуры во времени в данной точке O . Таким же образом можно найти распределение температуры и в других точках пространственной сетки. При решении задач для тел сложной формы число операций оказывается очень большим и задачу решают на ЭВМ.

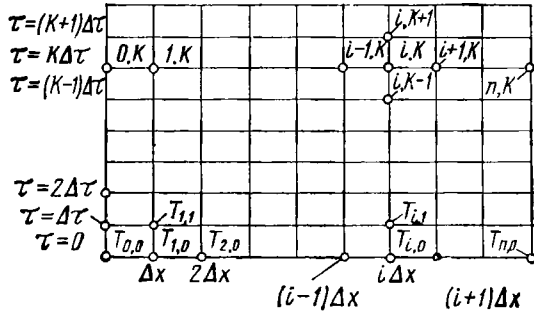


Рис. VI-6. К выводу уравнения нестационарной теплопроводности для одномерного температурного поля

прямых $x = x_i$ и $\tau = \tau_k$. По оси x отложим отрезки длиной $x = \Delta x, \dots, x = i\Delta x, \dots$, а по оси τ — промежутки времени $\tau = \Delta\tau, \dots, \tau = \kappa\Delta\tau$ (рис. VI-6).

Уравнение (V-1) в конечных разностях на основании (VI-2) и (VI-12) для точки i, κ имеет вид

$$\frac{T_{i, \kappa+1} - T_{i, \kappa}}{\Delta\tau} = a \left(\frac{T_{i-1, \kappa} - 2T_{i, \kappa} + T_{i+1, \kappa}}{\Delta x^2} \right). \quad (\text{VI-14})$$

Если температура $T_{i, \kappa}$ в точке i, κ в момент времени $\kappa\Delta\tau$ известна, то искомая температура $T_{i, \kappa+1}$ в той же точке тела, но в следующий момент времени $\tau = (\kappa + 1)\Delta\tau$ равна

$$T_{i, \kappa+1} = \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left[(T_{i-1, \kappa} + T_{i+1, \kappa}) + \left(\frac{(\Delta x)^2}{a\Delta\tau} - 2 \right) T_{i, \kappa} \right]. \quad (\text{VI-15})$$

Полученная формула (VI-15) позволяет найти распределение температуры по оси x в полуограниченном теле в любой момент времени, если заданы начальные и граничные условия. Начальное условие должно содержать распределение температуры по оси x , т. е. значения температур $T_{1, 0}, \dots, T_{i, 0}, \dots$ на границах слоев $x = \Delta x, \dots, x = i\Delta x$ при $\tau = 0$. Граничное условие должно содержать значение температуры $T_{0, 0}$ на границе тела $x = 0$ при $\tau = 0$. Используя эти условия (для мо-

мента времени $\tau = 0$), можно найти по формуле (VI-14) температуры $T_{1, 1}, \dots, T_{i, 1}$ в теле по оси x в момент времени $\tau = \Delta\tau$.

$$\frac{T_{i, 1} - T_{i, 0}}{\Delta\tau} = a \left(\frac{T_{i-1, 0} - 2T_{i, 0} + T_{i+1, 0}}{\Delta x^2} \right). \quad (\text{VI-16})$$

Используя найденное распределение температуры для момента времени $\tau = \Delta\tau$ по формуле (VI-15), можно найти температуры $T_{1, 2}, \dots, T_{i, 2}, \dots$ в момент $\tau = 2\Delta\tau$ и т. д. Исследования показали, что рассмотренная вычислительная схема будет устойчивой, т. е. ошибки неточного задания начальных данных и вычислительные ошибки не будут возрастать при увеличении τ , если выполняется условие

$$\frac{(\Delta x)^2}{a\Delta\tau} \geq 2. \quad (\text{VI-17})$$

Особенно простой формула (VI-15) становится при

$$\frac{(\Delta x)^2}{a\Delta\tau} = 2,$$

когда она принимает вид

$$T_{i, \kappa+1} = \frac{T_{i-1, \kappa} + T_{i+1, \kappa}}{2}. \quad (\text{VI-18})$$

Из (VI-18) следует, что температура $T_{i, \kappa+1}$ в точке $i, \kappa + 1$ в момент времени $\tau = (\kappa + 1)\Delta\tau$ не зависит от температуры $T_{i, \kappa}$, а зависит только от температур в двух соседних точках $T_{i-1, \kappa}$ и $T_{i+1, \kappa}$ в момент времени $\tau = \kappa\Delta\tau$.

По аналогии с условием (VI-17) для трехмерной задачи [уравнение (VI-13)] получим условие

$$\frac{\Delta x^2}{a\Delta\tau} \geq 6, \quad (\text{VI-19})$$

а для двумерной

$$\frac{\Delta x^2}{a\Delta\tau} \geq 4. \quad (\text{VI-20})$$

Из условий (VI-17), (VI-19), (VI-20) при заданном шаге по координате Δx можно найти такой шаг по времени $\Delta\tau$, что вычислительная схема будет устойчивой. Разностная схема типа (VI-14) называется явной, так как температура в момент $\tau = (\kappa + 1)\Delta\tau$ определяется по формуле (VI-14) через температуру в момент $\kappa\Delta\tau$. Кроме явных разностных схем, существуют так называемые неявные разностные схемы. Для уравнения (V-1) неявная разностная схема имеет вид

$$\frac{T_{i, \kappa+1} - T_{i, \kappa}}{\Delta\tau} = a \left(\frac{T_{i-1, \kappa+1} - 2T_{i, \kappa+1} + T_{i+1, \kappa+1}}{\Delta x^2} \right). \quad (\text{VI-21})$$

Сравнивая уравнение (VI-21) с (VI-14), можно заметить, что они различаются аппроксимацией $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. В явной схеме (VI-14) эта производная заменяется конечной разностью в момент $\tau_k = k\Delta t$, а в неявной схеме (VI-21) в момент $\tau_{k+1} = (k+1)\Delta t$. Уравнение типа (VI-21) решается труднее, чем (VI-14), так как в него входят неизвестные температуры в трех точках $(i-1, k+1)$, $(i, k+1)$, $(i+1, k+1)$. Поэтому нужно в этом случае решать сразу всю систему разностных уравнений типа (VI-21) для всех точек $i, k+1$ сетки.

Одним из самых распространенных методов решения неявных систем типа (VI-21) является метод прогонки. Несмотря на то что неявные разностные уравнения типа (VI-21) решаются сложнее, чем явные уравнения типа (VI-14), они имеют преимущество перед явными уравнениями. В отличие от явных схем, которые являются устойчивыми при выполнении условий (VI-17), неявные схемы являются абсолютно устойчивыми, т. е. вычислительные ошибки в этих схемах не возрастают при любом соотношении шагов по времени и пространству. Это позволяет выбирать шаг Δt большим, чем в явных схемах, и соответственно уменьшать общее время счета всей задачи. Более подробно с изложенными вопросами можно ознакомиться в специальной литературе [77].

§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ АНАЛОГИЙ

В тех случаях, когда аналитическое решение задачи теплопроводности невозможно, а численное решение оказывается очень громоздким, можно применить метод аналогии (гл. III, § 4).

Метод аналогии, как отмечалось выше, позволяет установить распределение температуры в исследуемом объекте по распределению другой, легко измеряемой величины в модели объекта, когда математическое описание распределения температуры и другой величины аналогичны (например, (III-33), (III-34)), а в безразмерной форме тождественны.

Гидродинамическая аналогия. Рассмотрим возможность моделирования процессов двумерной стационарной теплопроводности безвихревым потоком идеальной жидкости. Для идеальной жидкости известно следующее уравнение для функции тока:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{VI-22})$$

Линии, для которых $\psi = \text{const}$, называют линиями тока. Гармоническая сопряженная с ψ функция ϕ называется потенциалом скоростей потока. Линии тока и линии, вдоль которых потенциалы скоростей постоянны, взаимно ортогональны. Обе функции — тока и потенциала скоростей удовлетворяют уравнению Лапласа (сравним, например, (IV-49) и (VI-22)). Поэтому линии теплового потока и температурного потенциала при двумерной стационарной теплопроводности аналогичны соответственно — линиям тока и по-

тенциалу скоростей идеального потока жидкости. Линии тока в жидкости можно сделать видимыми, например, вводя в плоский поток кристаллы марганцевокислого калия, которые, перемещаясь, растворяются и оставляют видимые следы — линии тока* (рис. VI-7). Но так как они аналогичны линиям постоянного теплового потока, то, следовательно, можно экспериментально установить характер расположения последних. По линиям постоянного теплового потока можно построить графически линии постоянной температуры (изотермы), так как первые и вторые линии взаимно ортогональны. Уточнить изотермы можно, например, используя метод релаксации (см. предыдущий параграф и рис. VI-5).

Электрическая аналогия. Рассмотрим метод электрической аналогии [110], в котором вместо исследуемого тела берется модель — электрическая цепь, составленная из омических сопротивлений.

Пусть требуется решить задачу нестационарной теплопроводности в полуограниченном теле при одномерном температурном поле, используя названный метод. Схема электрической цепи полуограниченного тела (рис. VI-8, а) представлена на рис. VI-8, б. Начало цепи в точке P_0 соответствует границе исследуемого тела, в данном случае наружной поверхности; наконец, цепь в точке P_n соответствует n -му слою тела, если по условию задачи последний слой, в котором требуется найти температуру, будет иметь номер $n-1$. Точки P_1, P_{i-1}, P_i соответствуют точкам исследуемого тела $x = \Delta x, \dots, x = i\Delta x, \dots$. Эти же точки наносятся на сетку (см. рис. VI-6) при решении задачи численным методом.

К точкам P_0, P_n и $P'_1, \dots, P'_i, \dots$ подводят напряжения, которые соответствуют температурам, заданным в краевых условиях. Так, к точке P_0 подводится напряжение U_0 , соответствующее температуре T_0 , наружной поверхности тела в момент времени $\tau = 0$, к точке P_n — напряжение U_n , соответствующее заданной начальной температуре T_0 в n -м слое, к точкам $P'_1, \dots, P'_i$ — напряжения $U_{1,0}, \dots, U_{i,0}, \dots$, соответствующие заданным начальным температурам $T_{1,0}, \dots, T_{i,0}, \dots$ в слоях тела, расположенных на расстояниях $x = \Delta x, \dots, x = i\Delta x, \dots$ от наружной поверхности. В результате в узловых точках $P_1, \dots, P_i, \dots$ возникнут напряжения $U_{1,1}, \dots, U_{i,1}, \dots$, соответствующие

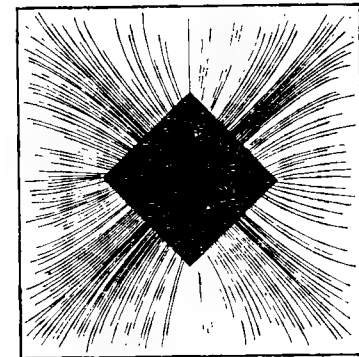


Рис. VI-7. К решению задачи теплопроводности для двумерного температурного поля методом гидродинамической аналогии. Визуализация линий тока в жидкости

* Методика эксперимента и способ расшифровки диаграмм типа, приведенных на рис. VI-7, изложены в специальной литературе [89].

щие искомым температурам $T_{1,1}, \dots, T_{i,1}, \dots$ в слоях тела $x = \Delta x, \dots, x = i\Delta x, \dots$ в момент времени $\tau = \Delta\tau$.

Таким образом, экспериментально найдены температуры, которые при численном решении можно подсчитать по формуле (VI-16). Первый шаг в использовании рассматриваемого метода позволяет сделать вывод, что сущность метода состоит в решении уравнения (VI-14) с помощью электрической цепи (рис. VI-9, б). Следующие шаги подтвердят сделанный вывод.

Для того чтобы найти температуры $T_{1,2}, \dots, T_{i,2}, \dots$ в тех же слоях, но в следующий момент времени $\tau = 2\Delta\tau$, достаточно подвести к точкам $P'_1, \dots, P'_i, \dots$ напряжения, равные найденным при первом измерении $U_{1,1}, \dots, U_{i,1}, \dots$.

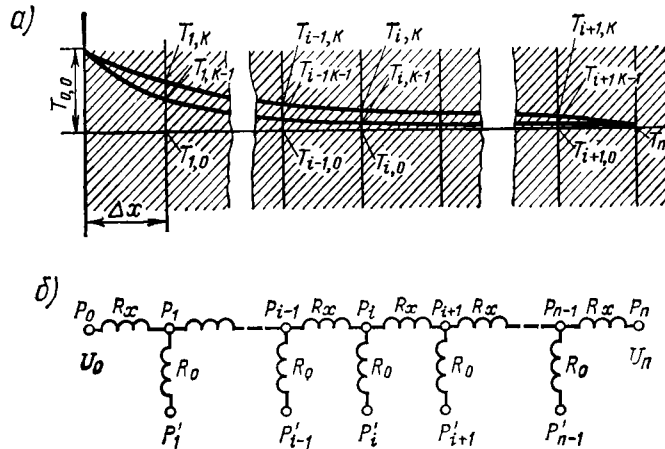


Рис. VI-8. К решению задачи нестационарной теплопроводности для одномерного температурного поля методом электрической аналогии

После осуществления этой операции в узловых точках $P_1, \dots, P_i, \dots$ возникнут напряжения $U_{1,2}, \dots, U_{i,2}, \dots$, соответствующие искомым температурам $T_{1,2}, \dots, T_{i,2}, \dots$.

В общем случае для отыскания распределения температуры $T_{1,\kappa+1}, \dots, T_{i,\kappa+1}, \dots$ в исследуемом теле в произвольный момент времени $\tau = (\kappa + 1)\Delta\tau$ достаточно подвести к точкам $P'_1, \dots, P'_i, \dots$ напряжения $U_{1,\kappa}, \dots, U_{i,\kappa}, \dots$, соответствующие температурам $T_{1,\kappa}, \dots, T_{i,\kappa}, \dots$ в момент времени $\tau = \kappa\Delta\tau$ и измерить напряжения в узловых точках $P_1, \dots, P_i, \dots$. Полученные напряжения $U_{1,\kappa+1}, \dots, U_{i,\kappa+1}, \dots$ и будут соответствовать искомым температурам $T_{1,\kappa+1}, \dots, T_{i,\kappa+1}, \dots$.

Для определения численного значения температуры по измеренному напряжению в цепи используется простое соотношение, которое, например, для слоя i тела имеет вид

$$T_{i,\kappa} = zU_{i,\kappa}, \quad (\text{VI-23})$$

где z — постоянная преобразования, определяемая по заданной в крайних условиях температуре и выбранному масштабу напряжений

$$z = \frac{T_{0,0}}{U_0}.$$

Здесь напряжение U_0 выбирается так, чтобы удобно было провести другие измерения в конкретном эксперименте.

На основании (VI-23) по измеренному напряжению в электрической цепи — модели можно определить соответствующую ему температуру в исследуемом теле.

Справедливость основных положений метода будет доказана, если удастся показать, что соотношения между напряжениями в электрической цепи (рис. VI-8), подготовленной для измерения, описываются уравнением, тождественным уравнению (VI-14).

По закону Кирхгофа, сумма токов $I_1 + I_2 + I_3$, притекающих к узловой точке P_i электрической цепи (рис. VI-9), равна нулю, т. е. $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Выразим значения токов через напряжения и сопротивления по закону Ома; в результате получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_{i-1,\kappa+1} - U_{i,\kappa+1}}{R_x}; \\ I_2 &= \frac{U_{i+1,\kappa+1} - U_{i,\kappa+1}}{R_x}; \\ I_3 &= \frac{U_{i,\kappa} - U_{i,\kappa+1}}{R_0}, \end{aligned}$$

где R_x и R_0 — соответствующие электрические сопротивления (рис. VI-8, б).

Складывая почленно эти выражения, получим

$$U_{i-1,\kappa+1} - 2U_{i,\kappa+1} + U_{i+1,\kappa+1} = \frac{(U_{i,\kappa+1} - U_{i,\kappa})R_x}{R_0}. \quad (\text{VI-24})$$

Полученное выражение (VI-24) тождественно уравнению (VI-14) при условии

$$R_0 = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} R_x,$$

которое и было выполнено при составлении электрической цепи (рис. VI-8).

При осуществлении рассмотренного метода на практике необходимые напряжения в указанные ранее точки электрической цепи подаются от источника напряжения E через потенциометры, как показано на рис. VI-10.

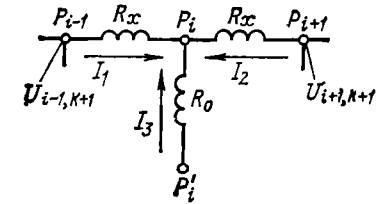


Рис. VI-9. К обоснованию метода электрической аналогии

Искомые напряжения в цепи или потенциометре измеряют, соединяя контакт P_r (рис. VI-10) с определенной точкой цепи или с подвижным контактом потенциометра. После соединения регулируют подвижный контакт потенциометра B или потенциометра D_i и при этом добиваются, чтобы измеритель M показал отсутствие тока в измерительной цепи. Поэтому напряжения в различных точках выражаются в относительных единицах; относительное предельное напряжение источника E равно $U = 1$.

Метод пригоден для решения более сложных задач нестационарной теплопроводности, чем рассмотренная. Можно, например, решить задачу с переменной во времени температурой на наружной поверхности полуограниченного тела.

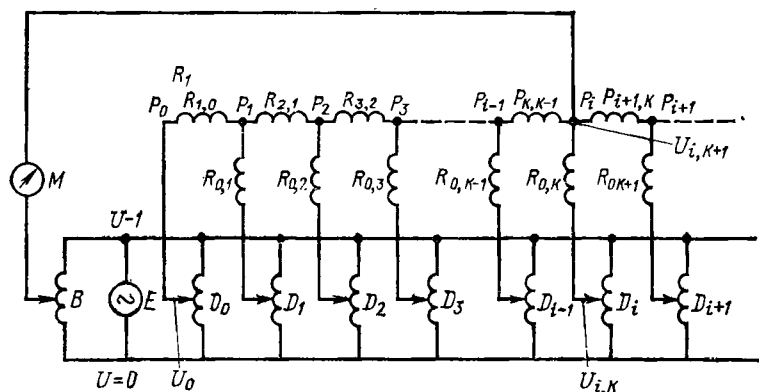


Рис. VI-10. Электрическая модель (схема) для исследования нестационарной теплопроводности в полуограниченном теле с одномерным температурным полем

Если через заданное число интервалов времени температура поверхности примет новое известное значение, то это обстоятельство легко учесть, изменив соответственно напряжение, подводимое к точке P_0 , с помощью потенциометра D_0 .

Метод позволяет решать задачи для тел сложной формы, которые состоят из материалов с различными теплофизическими свойствами. Можно решать задачи, где требуется учитывать зависимость физических констант ρ , c , λ от температуры, но в этих случаях электрическая цепь получается более сложной [110]. Именно для таких сложных задач этот метод является перспективным.

К достоинствам метода относятся: простота электрической схемы и способа измерения искомых напряжений, а также большая точность полученных результатов. Исследования показали [110], что ошибка в определении температуры по этому методу практически возникает только при аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности уравнением в конечных разностях и результаты, полученные при численном решении, совпадают с экспериментальными результатами.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОТДАЧИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В настоящей главе будут кратко рассмотрены основы теории пограничного слоя и способы исследования теплоотдачи с помощью этой теории. Возможности теории будут показаны на простых примерах теплоотдачи продольно обтекаемой пластины и в круглых трубах.

Теплоотдача твердому телу зависит от распределения температуры в жидкости. Температурное поле в свою очередь зависит от гидродинамической обстановки в потоке жидкости, которая сложилась к заданному моменту времени. Следовательно, для решения тепловой задачи вначале необходимо найти распределение скоростей, т. е. решить гидродинамическую задачу. Рассмотрим ее. Для простоты будем считать жидкость несжимаемой $\rho = \text{const}$, а теплоемкость постоянной величиной $c = \text{const}$, тогда в математическую формулировку гидродинамической задачи войдет система уравнений неразрывности (II-7), Навье—Стокса (II-28) и краевых условий (гл. II, § 5). Решить аналитически эту систему даже для постоянных ρ и c пока не удалось.

Главная трудность возникает при решении уравнений Навье—Стокса, которые представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Только при очень больших упрощениях эти уравнения удалось решить. Известны, например, решения [88] для установившегося плоскопараллельного течения в канале, ограниченном двумя параллельными плоскими стенками, для установившегося течения в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечением, для разгонного течения вблизи плоской стенки, ранее находившейся в состоянии покоя и внезапно начавшей двигаться в своей собственной плоскости с постоянной скоростью; для разгонного течения в бесконечно длинной круглой трубе, которое образовалось под действием возникшего перепада давлений, для плоскопараллельного и осесимметричного течения вблизи критической точки, возникшего при натекании жидкости из бесконечности на бесконечную стенку, поставленную поперек течения, и еще для нескольких простых случаев.

Перечисленные случаи течения жидкости весьма редко встречаются в инженерной практике, а полученные решения имеют в основном познавательное значение.

Известны приближенные решения уравнений Навье—Стокса для так называемого ползущего движения [88], первого предельного случая очень малой скорости (в более общей постановке малых чисел Re), когда силами инерции пренебрегают и учитывают только силы трения, так как силы инерции пропорциональны квадрату скорости,

а силы трения — первой степени. В уравнениях Навье—Стокса отбрасывают члены, учитывающие силы инерции, при этом они значительно упрощаются, например, уравнение (II-29) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right),$$

т. е. уравнение становится *линейным*.

Очень большой интерес представляет второй предельный случай — очень малой вязкости или больших значений числа Re.

Метод упрощения дифференциальных уравнений Навье—Стокса для второго предельного случая был разработан Прандтлем. В 1904 г. он представил доклад на эту тему Международному конгрессу математиков, собравшемуся в Гейдельберге.

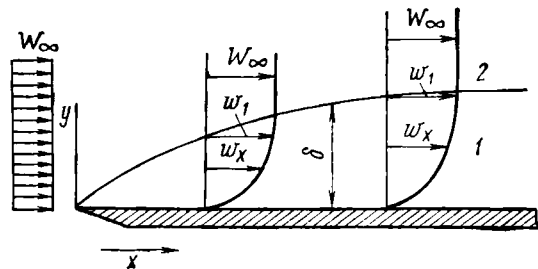


Рис. VII-1. Пограничный слой на пластине при продольном обтекании ($dp/dn=0$)

Пограничным слоем называют область течения вязкой теплопроводной жидкости, характеризующуюся малой (по сравнению с продольными размерами области) толщиной и большим поперечным градиентом величины, изменением которой обусловлен процесс переноса количества движения, теплоты, вещества [74].

Пограничный слой, характеризующийся большим поперечным градиентом продольной составляющей скорости, под действием которого осуществляется поперечный перенос количества движения, называют *динамическим*. По его толщине в направлении оси y скорость жидкости w_x изменяется от нуля у стенки (опыты показали, что жидкость не скользит по поверхности, а прилипает к ней) до скорости внешнего потока W_∞ (рис. VII-1). В этой области (I) силами трения пренебрегать нельзя. Даже при очень малой вязкости μ касательные напряжения $\tau = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y}$ (I-17) будут значительными, так как градиент скорости $\partial w / \partial y$ велик.

Толщиной пограничного слоя называется условная величина, определяемая для динамического пограничного слоя как расстояние по нормали от стенки, на котором продольная составляющая скорости w_x (рис. VII-1) с заданной точностью достигает своего предельного значения W_∞ вдали от стенки (т. е. во внешнем потоке).

В приближенных методах теории пограничного слоя постулируется, что динамический пограничный слой имеет конечную толщину

$\delta(x)$, которая определяется из условий, что на его внешней границе продольная составляющая скорости w_x достигает предельного значения W_∞ , а производная от переменной скорости w_x по нормам y обращается в нуль, т. е.

$$\left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y=\delta} = 0.$$

Для динамического пограничного слоя, который представляет собой весьма малую по размерам пространственную область, удастся значительно упростить уравнения Навье—Стокса (гл. II). Полученные после упрощения уравнения называют *уравнениями динамического пограничного слоя*.

Точное аналитическое решение уравнений динамического пограничного слоя слишком трудоемко, а для многих задач его вообще получить невозможно. Поэтому были разработаны приближенные методы решения этих уравнений.

Во внешнем потоке 2 (см. рис. VII-1) градиент скорости $\frac{\partial w_\infty}{\partial y}$ в реальных условиях не равен нулю, но мал по сравнению с градиентом скорости $\frac{\partial w_x}{\partial y}$ в пограничном слое I и поэтому касательные напряжения (I-17) также малы, и силами трения можно пренебречь. Здесь течение можно считать потенциальным (без вязкости) и для расчета такого течения пользоваться вместо сложных уравнений Навье—Стокса (II-29, II-30 и II-31) более простыми уравнениями Эйлера (II-32).

Итак, разбивая исследуемый поток жидкости на две области (пограничный слой и внешний поток) и делая перечисленные выше допущения, получим возможность описать течение в каждой из областей более простыми уравнениями, чем уравнения Навье—Стокса. Решая уравнение Эйлера, для внешнего потока найдем распределение скорости w_x на внешней границе пограничного слоя. Отметим, что распределение давления вдоль пограничного слоя $p = f(x)$ считается заданным. Давление по толщине пограничного слоя, т. е. вдоль оси y , принимается постоянным и равным давлению на его внешней границе (обоснование дано ниже в § 1, гл. VII). Результаты решения для внешнего потока принимаются за граничные условия на внешней кромке пограничного слоя. Эти граничные условия используются при решении уравнений динамического пограничного слоя.

Решая уравнения динамического пограничного слоя с соответствующими граничными условиями, найдем искомые распределения скоростей w_x и w_y .

Выше была рассмотрена схема приближенного решения гидродинамической задачи. Теперь коротко рассмотрим аналогичную схему для тепловой задачи.

Исследования показали, что интенсивный процесс теплообмена между твердым телом и омывающей его жидкостью происходит в тонком слое, прилегающем к поверхности тела. Этот слой называют *тепловым пограничным слоем*; он характеризуется

большим поперечным градиентом температуры, под действием которого осуществляется поперечный перенос теплоты.

Для теплового пограничного слоя удастся упростить уравнение энергии (II-52). Полученное после упрощения уравнение называют уравнением энергии теплового пограничного слоя. Можно получить точное аналитическое решение (распределение температуры в пограничном слое) этого уравнения, если из гидродинамической задачи определено распределение скорости поперек пограничного слоя и давления вдоль пограничного слоя. Однако точное решение трудно и поэтому, так же как и для динамического слоя, разработаны приближенные методы решения уравнения энергии теплового пограничного слоя (подробнее см. § 3, гл. VII).

В этой книге будут рассмотрены только приближенные методы решения уравнений динамического и теплового пограничного слоя.

Сущность теории пограничного слоя состоит в упрощении уравнений, описывающих процесс теплообмена между твердым телом и омывающей его жидкостью (Навье—Стокса, сплошности и энергии), на основании применения их к малой пространственной области — пограничному слою и отыскании методов решения, полученных после упрощения уравнений.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Произведем упрощение уравнений Навье—Стокса (II-29, II-30 и II-31), имея в виду получить уравнения для исследования пограничного слоя. Сделаем это для простого случая двумерного плоскопараллельного потока, обтекающего пластину. Расположим оси координат на передней кромке пластины, тогда уравнения неразрывности (II-7) и Навье—Стокса (II-29 и II-30) для двумерного потока несжимаемой $\rho = \text{const}$ жидкости имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-1})$$

Упрощение уравнений (VII-1) производится на основании оценки порядка величин, входящих в него, и отбрасывания малых. Количественное сравнение величин различной физической природы возможно только в том случае, если они представлены в безразмерной форме. Переведем уравнения (VII-1) в безразмерную форму. В качестве масштабов отнесения выберем для w скорость набегающего потока W_∞ , для координаты x — характерный продольный размер l , для времени τ — отношение $\frac{l}{W_\infty}$, для давления p — удвоенный динамический на-

пор ρW_∞^2 . Уравнения (VII-1) в безразмерной форме с учетом $\text{Re} = \frac{W_\infty l}{\nu}$ можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w'_x}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_x}{\partial y'^2} \right), \\ \frac{\partial w'_y}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial w'_y}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_y}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_y}{\partial y'^2} \right), \\ \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \frac{\partial w'_y}{\partial y'} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-2})$$

где штрихами отмечены безразмерные величины, а критерий Рейнольдса Re — величина безразмерная по определению, поэтому он не отмечен штрихом.

Оценка порядка величин

Для выяснения сущности оценки рассмотрим простой пример. Пусть две переменных x и y , характерные для некоторого процесса, изменяются соответственно в интервалах: x — от 0 до x_0 , а y — от 0 до y_0 , тогда говорят, что x определена как величина порядка x_0 , а y — порядка y_0 . В данном примере нам неизвестно ни одного текущего значения x и y в заданном интервале и речь идет только об оценке порядка значений переменных x и y . Вместо слов «порядок переменной x равен x_0 » или «порядок переменной y равен y_0 » пишут

$$O(x) = x_0 \text{ и } O(y) = y_0,$$

где O — первая буква латинского слова *ordo* — порядок.

Пусть переменные x и y одной физической природы и по условию задачи

$$\frac{y_0}{x_0} \approx 1.$$

Тогда

$$O(y_0) = O(x_0)$$

и, очевидно,

$$O(x) = O(y).$$

Если по условию задано

$$\frac{y_0}{x_0} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{y_0}{x_0} \gg 1,$$

то можно сказать, что в первом случае переменная y пренебрежимо мала по сравнению с переменной x , а во втором наоборот.

Порядок производной определяют из выражения

$$O\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) = \frac{y_0}{x_0^m}, \quad (\text{VII-3})$$

которое написано на основании (III-6); множитель (см. III-4) опущен как несущественный для оценки порядка величины производной (в большинстве случаев рассматриваются производные первого и второго порядка).

Теперь перейдем к оценке порядка относительных величин, входящих в уравнение (VII-2).

Выберем масштабы скорости и линейного размера так, чтобы

$$W_{\infty} = 1, l = 1.$$

Тогда

$$O(w) = 1 \text{ и } O(x) = 1,$$

но

$$w'_x = \frac{w_x}{W_{\infty}} \quad \text{и} \quad x' = \frac{x}{l},$$

следовательно, $O(w'_x) = 1$ и $O(x') = 1$.

На основании полученных соотношений с учетом (VII-3) можно найти порядок производной

$$O\left(\frac{\partial w'_x}{\partial x'}\right) = O\left(\frac{w'_x}{x'}\right) = 1. \quad (a)$$

Так как величина y в пределах пограничного слоя может изменяться от 0 до δ (рис. VII-1), то

$$O(y) = \delta,$$

но

$$y' = \frac{y}{l},$$

тогда

$$O(y') = \frac{\delta}{l} = \delta',$$

где δ' — безразмерная толщина пограничного слоя.

Примем*, что толщина пограничного слоя δ очень мала по сравнению с характерным размером l тела, т. е.

$$\delta \ll l. \quad (б)$$

Теперь оценим порядок величин в уравнениях (VII-2). Начнем с уравнения сплошности. Оба его члена должны иметь одинаковый порядок, но первый на основании (a) порядка единицы, значит и второй будет иметь такой же порядок, т. е.

$$O\left(\frac{\partial w'_y}{\partial y'}\right) = O\left(\frac{w'_y}{y}\right) = 1,$$

откуда с учетом (б) получим

$$O(w'_y) = \delta'.$$

* Только при таком допущении пограничный слой имеет смысл очень малой области потока, для которой на этом основании можно упростить уравнения Навье — Стокса.

Из полученного соотношения с учетом (б) следует

$$w'_y \ll 1,$$

т. е. величина w'_y много меньше единицы и ею можно пренебречь в сравнении с величинами порядка единицы.

Перепишем уравнение (VII-2) с указанием порядка величины каждого члена под уравнением

$$\frac{\partial w'_x}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_x}{\partial y'^2} \right); \quad (VII-4)$$

$$\frac{\partial w'_y}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial w'_y}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_y}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_y}{\partial y'^2} \right) \quad (VII-5)$$

$$\frac{\partial w'_x}{\partial x} + \frac{\partial w'_y}{\partial y} = 0. \quad (VII-6)$$

Сразу видно, что второй и третий члены первого уравнения (проекция на ось x) имеют порядок единицы. Примем, что первый член $\frac{\partial w'_x}{\partial \tau'}$

имеет такой же порядок, как и второй $w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'}$, такое допущение можно сделать для течений, в которых не возникают внезапные ускорения [88]. Далее рассмотрим члены уравнения (VII-4), зависящие от вязкости. Сразу видно, что первый из них можно отбросить, так как он много меньше второго, на основании $\delta' \ll 1$. Второй член $\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w'_x}{\partial y'^2} \right)$ будет иметь одинаковый порядок с инерционными членами, т. е. порядок единицы, при условии

$$\frac{1}{\text{Re}} \sim \delta'^2. \quad (VII-7)$$

Условие (VII-7) выполняется, когда число Рейнольдса внешнего потока $\text{Re} = \frac{W_{\infty} l}{\nu}$ велико. Отметим, что для таких течений из условия (VII-7) можно найти порядок толщины динамического пограничного слоя

$$\delta' \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (VII-8)$$

Для дальнейших исследований в уравнении (VII-4) сохраним только члены, имеющие порядок единицы.

Рассмотрим второе уравнение (VII-5, проекция на ось y). Видно, что все его члены имеют порядок δ' , тогда как все оставленные после

упрощения члены первого уравнения имеют порядок 1, поэтому второе уравнение отпадает. Из второго уравнения следует $\frac{\partial p'}{\partial y'} = \delta'$, но, учитывая, что $\delta' \ll 1$, можно принять

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

т. е. давление жидкости по толщине пограничного слоя остается постоянным. Распределение давления вдоль внешней границы пограничного слоя представляет собой функцию $p'(x', \tau')$, координаты x' и времени τ' и ее считают известной. Член, зависящий от давления в уравнении (VII-4), может быть определен по известной функции распределения давления на внешней границе пограничного слоя, и вопрос о том, следует ли его оставлять в указанном уравнении (VII-4), должен решаться для каждого конкретного случая отдельно. Пусть в нашем случае он имеет порядок единицы и поэтому оставим его в уравнении (VII-4).

В результате упрощений уравнений Навье—Стокса (VII-4), (VII-5) и неразрывности (VII-6) получены уравнения, которые в размерных величинах имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-9})$$

кроме того

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

при следующих граничных условиях:

- 1) при $y = 0$ $w_x = w_y = 0$;
- 2) при $y \rightarrow \infty$ $w_x = W_x(\tau, x)$,

где W — скорость внешнего потока вдоль оси x .

Систему уравнений (VII-9), впервые полученную Прандтлем в 1904 г., называют уравнениями пограничного слоя.

В дальнейшем будем рассматривать установившееся движение жидкости, для которого $\frac{\partial w_x}{\partial \tau} = 0$, а уравнения (VII-9) в данном случае будут представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-10})$$

граничные условия могут быть представлены в форме

$$1) \text{ при } y = 0 \quad w_x = w_y = 0;$$

$$2) \text{ при } y \rightarrow \infty \quad w_x = W_x(x).$$

Поясним смысл граничных условий. Первое из них не вызывает сомнений, так как по условию «прилипания» на стенке при $y = 0$ продольная составляющая скорости w_x равна нулю; рассматривается непроницаемая стенка, поэтому поперечная составляющая скорости w_y у поверхности стенки также равна нулю. Смысл второго условия состоит в следующем: продольная составляющая скорости w_x должна перейти в известную для внешнего потока функцию $W_x = f(x)$. Переход w_x к W_x осуществляется асимптотически и поэтому, строго говоря, он имеет место при $y \rightarrow \infty$, но при этом вопрос о толщине пограничного слоя теряет смысл. Однако практически величина w_x достигает значения w_1 , близкого к W_x (при продольном обтекании пластины $W_x = W_\infty$), например, $w_1 = 0,99 W_x$ в очень тонком слое, толщина которого иногда принимается за искомую толщину пограничного слоя.

Покажем, как находят распределение скорости W_x на внешней кромке пограничного слоя вдоль x . Для этого рассмотрим случай стационарного потенциального течения вдоль обтекаемой пластины, когда поток скользит (не прилипает) по ее поверхности. В этих условиях градиентом скорости $\partial W_x / \partial y$ и членами, выражающими силу вязкости, можно пренебречь. Тогда уравнение (VII-1) в проекции на ось x имеет вид

$$W_x \frac{\partial W_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (\text{VII-11})$$

Принтегрируем (VII-11); в результате получим *уравнение Бернулли*.

$$p + \frac{\rho}{2} W_x^2 = \text{const.}$$

Пусть распределение давления в потенциальном потоке задано, тогда, решая уравнение Бернулли, можно найти искомое распределение скорости W_x .

Найденное таким образом распределение скорости на поверхности пластины переносят на внешнюю кромку пограничного слоя, который возникает при движении вязкой жидкости вдоль той же пластины при тех же параметрах потока. Другими словами, делается допущение о том, что на внешней границе пограничного слоя и на непроницаемой стенке, омываемой потенциальным потоком, граничные условия одинаковы.

В некоторых случаях пограничный слой оказывает существенное влияние на внешний потенциальный поток, тогда такое допущение может привести к значительным ошибкам. В этих случаях распределение скорости $W_x = f(x)$ находят экспериментально, так как соответствующие теоретические решения оказываются очень громоздкими или их вообще не удается получить.

Отметим, что кроме системы уравнений (VII-10) и граничных условий, должен быть задан профиль продольной скорости w_x в некото-

ром начальном сечении потока, например, при $x = x_0$, т. е. должна быть задана зависимость $w_x = f(x_0, y)$. Решение системы уравнений (VII-10) и граничных условий сводится к определению профилей скорости в пограничном слое в других поперечных сечениях, определяют, как развивается профиль при заданном распределении давления и скорости во внешнем потенциальном потоке.

Впервые система уравнений и граничных условий (VII-10) была точно решена. Г. Блазиусом для пограничного слоя, возникающего на пластине, обтекаемой в продольном направлении, когда $dp/dx = 0$, т. е. давление вдоль пограничного слоя остается постоянным. Он нашел распределение скорости по толщине пограничного слоя. Однако даже в этом простом случае решение оказалось громоздким.

Известно еще несколько частных случаев, для которых получено точное решение системы уравнений пограничного слоя. В этих частных случаях исследовано взаимодействие потока с телами простой формы. Однако наибольший интерес представляет общий случай — взаимодействие потока жидкости с телом любой заданной формы. Именно такие задачи встречаются в инженерной практике. Для них разработаны приближенные способы решения уравнений пограничного слоя.

Рассмотрим метод, предложенный Карманом. Достоинством метода, помимо простоты, является то, что он позволяет получить приближенное решение даже тогда, когда точное решение вообще невозможно. Метод сводится к решению интегральных уравнений пограничного слоя или, как их часто называют, — интегральных соотношений Кармана.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Выведем интегральное уравнение для случая обтекания пластины ($dp/dx = 0$) несжимаемой жидкостью ($\rho = \text{const}$) в продольном направлении, когда давление и скорость вдоль пограничного слоя (координаты x) остаются неизменными, т. е. $\frac{dp}{dx} = 0$ и $W_\infty = w_1 = \text{const}$ (рис. VII-2).

Выделим в потоке жидкости параллелепипед с размерами dx в направлении оси x (вдоль пограничного слоя), h в направлении оси y , причем величина h выбрана так, что в пределах dx она всегда больше толщины пограничного слоя δ и l в направлении оси z .

Применим к течению в пограничном слое закон о количестве движения. Этот закон гласит: *изменение количества движения (масса $\times$ скорость) выделенного параллелепипеда в единицу времени в общем случае будет равно сумме массовых (тяжести) и поверхностных (давления и трения) сил, действующих на параллелепипед.*

Принимаем равными нулю массовые силы и давление. Значит в рассматриваемом случае изменение количества движения параллелепипеда равно силе трения, приложенной к нему.

Найдем изменение количества движения на основании следующих рассуждений. Расход массы через грань 12 (рис. VII-2) внутрь параллелепипеда равен

$$\rho \int_0^h w_x dy;$$

пусть расход массы через грань 34 больше, чем через грань 12, тогда разность расходов через эти грани положительна и равна

$$\rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx. \quad (a)$$

Количество движения параллелепипеда уменьшится в результате положительной разности расходов вдоль оси x на

$$-\rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x^2 dy \right) dx. \quad (б)$$

Расход массы через грань 34 больше, чем через грань 12, но рассматривается несжимаемая жидкость и такое положение возможно только при условии, что через грань 24

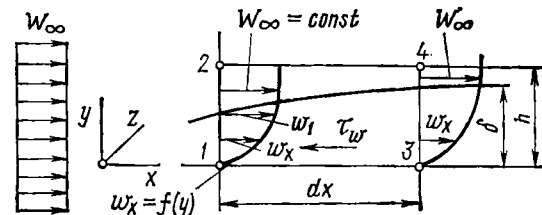


Рис. VII-2. К выводу интегрального уравнения динамического пограничного слоя

внутри параллелепипеда втекает жидкость в количестве, равном разности расходов через грани 12 и 34 (а). Эта жидкость внесет внутрь параллелепипеда количество движения, которое можно определить по следующей формуле:

$$+\rho W_\infty \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx. \quad (в)$$

Теперь в соответствии с законом о количестве движения для рассматриваемого случая, принимая $W_\infty = w_1$ и учитывая силы трения, можно написать

$$\rho w_1 \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx - \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x^2 dy \right) dx = \tau_w dx \quad (VII-12)$$

или после простых преобразований

$$\frac{d}{dx} \int_0^h (w_1 - w_x) w_x dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (VII-13)$$

Полученное интегральное уравнение называют также интегральным соотношением Кармана для безградиентного течения ($\frac{\partial p}{\partial x} = 0$) пограничного слоя.

Теперь выведем интегральное уравнение динамического пограничного слоя для течения вдоль клиновидного тела (рис. VII-3, а) с переменным давлением вдоль поверхности $p = f(x)$ (рис. VII-3, б), в этих условиях $\frac{dp}{dx} \neq 0$. При градиентном течении скорость на внешней границе пограничного слоя w_1 является функцией координаты x . Преобразуем в соответствии с этим первый член (VII-12), внесем в него вместо постоянной скорости W_∞ переменную $w_1(x)$. После дифференцирования получим

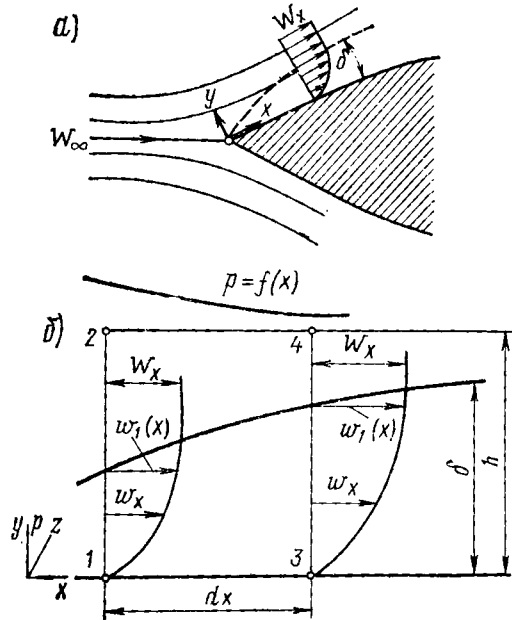


Рис. VII-3. Пограничный слой на клинообразном теле ($dp/dx \neq 0$)

Здесь произведение $h \cdot 1$ представляет собой площадь грани контрольного параллелепипеда, перпендикулярную оси x , с размерами $1, 2 = h$, $1, 3 = dx$ и 1 (рис. VII-3, б).

Теперь можно написать интегральное уравнение для градиентного течения

$$\begin{aligned} dx\rho \frac{dw_1}{dx} \int_0^h w_x dy - dx\rho \frac{dw_1}{dx} \int_0^h w_x dy - \\ - dx\rho \frac{d}{dx} \int_0^h w_x^2 dy = \tau_w dx + \frac{dp}{dx} dxh. \end{aligned} \quad (\text{VII-14})$$

Используя (VII-11) и учитывая, что w_1 не зависит от y , преобразуем

$$\begin{aligned} dx\rho \frac{d}{dx} \left(w_1 \int_0^h w_x dy \right) = \\ = dx\rho \frac{dw_1}{dx} \int_0^h w_x dy + \\ + dx\rho w_1 \frac{d}{dx} \int_0^h w_x dy. \end{aligned}$$

Второй член в (VII-12) для градиентного течения имеет такой же вид, как и для безградиентного.

В правую часть для градиентного течения необходимо добавить силу давления, равную

$$\frac{dp}{dx} dx \cdot h \cdot 1.$$

последний член в (VII-14) следующим образом:

$$-\frac{dp}{dx} h = \rho w_1 \frac{dw_1}{dx} \int_0^h dy = \rho \frac{dw_1}{dx} \int_0^h w_1 dy.$$

Подставим в (VII-14) вместо $\frac{dp}{dx}$ его значение из полученного выражения и, произведя сокращения, получим

$$\begin{aligned} -\frac{dw_1}{dx} \int_0^h w_x dy + \frac{dw_1}{dx} \int_0^h w_x dy - \frac{d}{dx} \int_0^h w_x^2 dy + \\ + \frac{dw_1}{dx} \int_0^h w_1 dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \end{aligned}$$

Сгруппируем первый и четвертый, а далее второй и третий члены полученного уравнения

$$\frac{d}{dx} \int_0^h (w_1 - w_x) w_x dy + \frac{dw_1}{dx} \int_0^h (w_1 - w_x) dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (\text{VII-15})$$

В обоих интегралах полученного уравнения подынтегральные выражения за пределами пограничного слоя равны нулю, так как скорость w_x переходит в w_1 ; поэтому в качестве верхнего предела можно взять сколь угодно большое число $h \rightarrow \infty$ и при этом уравнение (VII-15) сохранит силу. Введем обозначения

$$\delta^* \equiv \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{w_x}{w_1} \right) dy \quad (\text{VII-16})$$

(величину δ^* называют толщиной вытеснения) и

$$\delta^{**} \equiv \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{w_x}{w_1} \right) \frac{w_x}{w_1} dy \quad (\text{VII-17})$$

(величину δ^{**} называют толщиной потери импульса), с учетом которых уравнение (VII-15) примет вид

$$\frac{d}{dx} (w_1^2 \delta^{**}) + w_1 \frac{dw_1}{dx} \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (\text{VII-18})$$

Уравнения (VII-15) или (VII-18) называют интегральными уравнениями для плоского несжимаемого пограничного слоя с градиентом давления.

Поясним физический смысл величин δ^* и δ^{**} . Перепишем (VII-16) в виде

$$\omega_1 \delta^* = \int_0^{\infty} (\omega_1 - \omega_x) dy. \quad (\text{VII-16a})$$

Интеграл в правой части этого выражения численно равен площадке 123 на рис. VII-4, а; он представляет собой величину, на которую уменьшится расход вязкой жидкости через сечение пограничного слоя $abcd$ по сравнению с невязкой — «потерю расхода» (рис. VII-4, б).

Высота прямоугольника, равновеликого площадке 123 (рис. VII-3, а), представляет собой толщину вытеснения δ^* . Или другими словами — толщина слоя в потоке невязкой жидкости, через который может пройти при скорости $\omega_x = \omega_1$ «потеря расхода»,

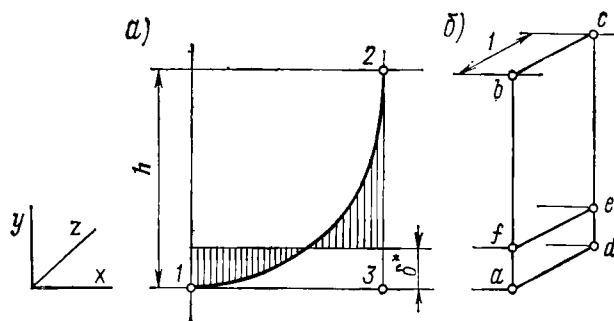


Рис. VII-4. К определению толщины вытеснения δ^*

есть толщина вытеснения. Название отрезка δ^* соответствует его физическому смыслу, действительно при определении расхода вязкой жидкости можно принимать поток невязким, но считать, что он (линии тока) отнесен от поверхности пластины на величину δ^* , так как расход вязкой жидкости через сечение $abcd$ равен расходу невязкой жидкости через сечение $fbce$.

В выражении (VII-16 а) верхний предел принят равным бесконечности на том основании, что скорость ω_x приближается к ω_1 асимптотически. В приближенных расчетах верхний предел принимается равным такой величине, при которой подынтегральная функция обращается в нуль с заданной степенью точности. На практике приближенное значение толщины вытеснения находят из следующего выражения:

$$\omega_1 \delta^* = \int_0^{\delta} (\omega_1 - \omega_x) dy. \quad (\text{VII-16б})$$

Перепишем (VII-17) в виде

$$\omega_1^2 \delta^{**} = \int_0^{\infty} \omega_x (\omega_1 - \omega_x) dy. \quad (\text{VII-17a})$$

Так как выражения (VII-16 а) и (VII-17 а) построены по одному принципу, то для величины δ^{**} можно дать следующее определение. Толщина слоя в потоке невязкой жидкости, через который проходит количество движения, равное потере количества движения вязкой жидкостью при течении ее через пограничный слой, называется т о л щ и н о й п о т е р и и м п у л ь с а (количества движения).

Прежде чем перейти к решению интегрального соотношения пограничного слоя, отметим следующие важные обстоятельства.

Если при решении дифференциальных уравнений пограничного слоя (VII-10) искомой является функция $\omega_x = f(y)$ распределения продольной скорости ω_x по толщине пограничного слоя, то при решении интегральных соотношений (VII-13, VII-15) эта функция выбирается произвольно, но так, чтобы граничные условия на поверхности тела и на внешней кромке пограничного слоя были удовлетворены.

Опыт показал, что режим течения в пограничном слое может быть ламинарным или турбулентным; интегральные соотношения оказываются пригодными для обоих режимов течения, однако вид функций $\omega_x = f(y)$, способ их выбора, а также метод определения касательных напряжений (правая часть интегральных соотношений) будут различными для ламинарного и турбулентного режимов течения. Поэтому решение интегральных соотношений для этих двух режимов течения рассмотрим раздельно.

Решение интегрального уравнения для динамического ламинарного пограничного слоя

Рассмотрим плоскопараллельный поток жидкости, обтекающий пластинку в продольном направлении. Пограничный слой возникает у передней кромки пластинки и толщина его вдоль оси x постепенно возрастает (рис. VII-5).

Как показывает опыт, в начале пластины возникает ламинарный пограничный слой, в котором наблюдается ламинарное движение жидкости. Л а м и н а р н ы м д в и ж е н и е м называется такое, при котором возможно существование стационарных траекторий ее частиц. На некотором расстоянии от передней кромки пластины $x_{кр}$ ламинарный пограничный слой начинает постепенно переходить в турбулентный, в последнем наблюдается турбулентное движение жидкости. Т у р б у л е н т н ы м называется движение жидкости с хаотично изменяющимися во времени траекториями частиц, при котором в потоке возникают нерегулярные пульсации скорости, давления и других параметров, неравномерно распределенные в потоке [74].

Опытами установлено, что переход ламинарного режима течения в пограничном слое в турбулентный происходит при некотором значении числа Рейнольдса $Re_{кр} = \frac{W_x x_{кр}}{\nu}$, которое называют к р и т и ч е с к и м. Однако переход может начаться при числах Рейнольдса, меньших, чем $Re_{кр}$, если искусственно возбуждать турбулентность основного потока, например, выставляя на его пути перед пластинкой сетку или увеличивая турбулентность в самом пограничном слое, на-

пример, сделав поверхность пластинки шероховатой. Можно, наоборот, затян timer процесс перехода ламинарного режима течения в пограничном слое в турбулентный, устраняя источники турбулентности как в основном потоке, так и в самом пограничном слое. Более подробно проблемы турбулентности будут обсуждаться позднее.

Перейдем к решению интегрального соотношения для ламинарного пограничного слоя на пластинке. Искомой величиной является толщина пограничного слоя δ . Рассмотрим решение уравнения (VII-13), справедливое в случае, когда давление вдоль пограничного слоя остается неизменным. В (VII-13) для интеграла примем верхний предел,

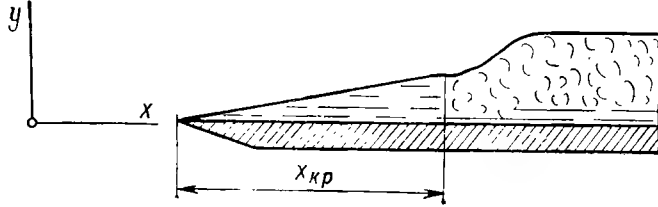


Рис. VII-5. Ламинарный и турбулентный пограничные слои на пластине при продольном обтекании

равным такой величине $y = \delta$, при которой подынтегральная функция обратится в нуль с заданной по условию точностью (при $y = \delta$, $w_x = w_1$), после чего интегральное соотношение (VII-13) примет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (w_1 - w_x) w_x dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (\text{VII-19})$$

Выберем функцию для распределения скорости w_x по толщине пограничного слоя в виде полинома

$$w_x = a + by + cy^2 + dy^3, \quad (\text{VII-20})$$

где a, b, c, d — постоянные коэффициенты.

Для определения постоянных коэффициентов в (VII-20) используют условия на поверхности пластинки $y = 0$ и на внешней границе пограничного слоя $y = \delta$.

При

$$y = 0, \quad w_x = 0 \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0,$$

равенство нулю второй производной (в нашем случае $dp/dx = 0$) следует из первого уравнения (VII-10); если его написать для $y = 0$, все члены кроме последнего обратятся в нуль.

При

$$y = \delta \text{ и } w_x = w_1 = W_{\infty} = \text{const}, \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0,$$

первая производная равна нулю, на основании допущения плавного перехода кривой $w_x = f(y)$ к вертикальной прямой $W_{\infty} = \text{const}$

на внешней границе пограничного слоя (см. рис. VII-2). Полагая $y = 0$ и $w = 0$, из (VII-20) получим $a = 0$. Первая производная от (VII-20) равна

$$\frac{dw_x}{dy} = b + 2cy + 3d \cdot y^2,$$

а вторая

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = 2cdy + 6d \cdot ydy = 0.$$

Приравняем нулю вторую производную

$$2c + 6d \cdot y = 0,$$

откуда при $y = 0$ следует, что $c = 0$.

Приравняем нулю первую производную и, учитывая, что $c = 0$, а $y = \delta$, получим

$$b + 3d\delta^3 = 0, \quad b = -3d\delta^3.$$

Определим постоянную d из (VII-20), используя полученные значения для a, c и b и учитывая, что при $y = \delta$ и $w_x = W_{\infty}$,

$$W_{\infty} = -3d\delta^3 + d\delta^3, \quad \text{откуда } d = -\frac{1}{2} \frac{W_{\infty}}{\delta^3}.$$

Используя полученные значения постоянных a, b, c, d из уравнения (VII-20), найдем искомую функцию распределения продольной скорости w_x по толщине пограничного слоя

$$\frac{w_x}{W_{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (\text{VII-21})$$

Подставляя найденную зависимость в интеграл количества движения (VII-19), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} (W_{\infty} - w_x) w_x dy &= W_{\infty}^2 \int_0^{\delta} \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \times \\ &\times \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \frac{39}{280} W_{\infty}^2 \delta. \end{aligned}$$

Используя зависимость (VII-21), найдем касательное напряжение на поверхности пластинки $y = 0$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{W_{\infty}}{\delta}. \quad (\text{VII-22})$$

Интегральное соотношение (VII-19) пограничного слоя с учетом двух последних зависимостей превращается в дифференциальное уравнение вида

$$\frac{39}{280} W_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho} \frac{W_{\infty}}{\delta}.$$

После разделения переменных, сокращения и преобразования получим

$$\frac{13}{140} \delta d\delta = \frac{v}{W_\infty} dx.$$

Размещая начало координат на передней кромке пластинки, получим граничные условия в виде

$$\text{при } x = 0, \delta = 0.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение с учетом граничных условий, найдем

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{\frac{W_\infty x}{v}}} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}. \quad (\text{VII-23})$$

Функция (VII-23) представляет собой приближенное решение дифференциальных уравнений пограничного слоя (VII-10) без градиента давления для ламинарного режима течения в нем.

Сравним приближенное решение с точным. Найдем безразмерное касательное напряжение, для этого разделим правую и левую части (VII-22) на ρW_∞^2 [см. например, (III-18)] и подставим вместо δ ее значение из (VII-23). В результате получим формулу для определения безразмерного касательного напряжения

$$\frac{\tau_w}{\rho W_\infty^2} = \frac{0,323}{\sqrt{Re_x}}. \quad (\text{VII-24})$$

Аналогичная формула, но полученная на основании точного решения, содержит численный множитель 0,332. Следовательно, ошибка составляет всего три процента.

Введем понятие **локального коэффициента трения** c_f в следующей форме:

$$c_f = \frac{\tau_w(x)}{\frac{\rho W_\infty^2}{2}}, \quad (\text{VII-25})$$

где $\tau_w(x)$ — касательное напряжение на пластине на расстоянии x от ее передней кромки.

Учитывая уравнение (VII-25), из (VII-24) получим

$$c_f = \frac{0,646}{\sqrt{Re_x}}. \quad (\text{VII-26})$$

На основании точного решения уравнений пограничного слоя получена следующая формула для определения c_f :

$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}. \quad (\text{VII-27})$$

Среднее значение коэффициента трения для всей пластины длиной l и шириной 1 определяется из выражения

$$C_f = \frac{1}{l} \int_0^l c_f dx = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} dx = \frac{0,664}{l} \sqrt{\frac{v}{W_\infty}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Так как

$$\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \sqrt{x} \Big|_0^l = 2 \sqrt{l},$$

то

$$C_f = 2 \frac{0,664}{\sqrt{Re_l}} = 2c_f$$

или

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}}. \quad (\text{VII-28})$$

Формула (VII-28) составляет *содержание закона Блазиуса* для сопротивления продольно обтекаемой пластины, когда течение в пограничном слое на ее поверхности является ламинарным. Этот закон справедлив для чисел Рейнольдса

$$Re_l = \frac{W_\infty l}{v} < 5 \cdot 10^5 \div 10^6.$$

В заключение отметим принципиальные особенности приближенного метода решения уравнений динамического пограничного слоя.

Основная предпосылка приближенного метода состоит в отказе от удовлетворения дифференциальных уравнений пограничного слоя для каждой струйки жидкости в нем. По приближенному методу решают не дифференциальные уравнения, а интегральные соотношения пограничного слоя, поэтому удается удовлетворить дифференциальным уравнениям только в среднем по толщине пограничного слоя.

Точное решение дифференциального уравнения (в том числе пограничного слоя) представляет собой функцию, которая при подстановке ее в это уравнение обращает последнее в тождество для любой точки в исследуемой области (в том числе в пограничном слое). Решения, получаемые по приближенному методу, не удовлетворяют этому требованию по причинам, о которых было сказано выше.

В приближенном методе рассматривается только главное движение, поэтому поперечная составляющая скорости исключается из рассмотрения. Например, в случае плоскопараллельного потока рассматривается главное движение вдоль оси x и в интегральные соотношения (VII-13) и (VII-15) входит только скорость w_x .

В приближенном методе скорость поперек пограничного слоя представляется произвольно выбираемой аппроксимацией, являющейся интерполяционной функцией, так как она определена на концах интервала граничными условиями.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнение энергии (II-52) для стационарного двумерного потока вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\rho c_p \left(w_x \frac{\partial \theta}{\partial x^2} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y^2} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi_w \dots, \quad (\text{VII-29})$$

где $\theta = T - T_w$, а T и T_w — температуры потока и стенки.

Упростим это уравнение, применив его к малой пространственной области теплового пограничного слоя*, так же, как это было сделано для динамического слоя. Обозначим толщину теплового пограничного слоя через Δ и предположим, что порядок толщин динамического δ и теплового Δ слоев одинаков.

Представим уравнение (VII-29) в безразмерной форме (выберем в качестве масштабов отнесения скорость набегающего потока W_∞ , характерный размер l , избыточную температуру $\Theta_\infty = T_\infty - T_w$; диссипативную функцию Φ_w (II-36) запишем в явной форме), т. е.

$$\rho c_p \frac{W_\infty \Theta_\infty}{l} \left(w'_x \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial \theta'}{\partial y'} \right) = \lambda \frac{\Theta_\infty}{l^2} \left(\frac{\partial^2 \theta'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y'^2} \right) + \frac{W_\infty^2}{l^2} \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial w'_x}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'_y}{\partial y'} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial w'_y}{\partial x'} + \frac{\partial w'_x}{\partial y'} \right)^2 \right\}. \quad (\text{VII-30})$$

Произведя оценку порядка величин и отбросив малые, получим уравнение энергии для теплового пограничного слоя

$$\rho c_p \frac{W_\infty \Theta_\infty}{l} \left(w'_x \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial \theta'}{\partial y'} \right) = \lambda \frac{\Theta_\infty}{l^2} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y'^2} + \mu \frac{W_\infty^2}{l^2} \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y'} \right)^2 \quad (\text{VII-31})$$

или

$$w'_x \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial \theta'}{\partial y'} = \frac{a}{W_\infty l} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y'^2} + \frac{\mu W_\infty}{\rho c_p l \Theta_\infty} \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y'} \right)^2. \quad (\text{VII-31a})$$

Последний член в полученном уравнении представляет собой теплоту, которая возникает в пограничном слое в результате внутреннего трения. Он оказывается существенным только при больших скоростях потока. В условиях полета ракет или других аппаратов с большими скоростями в плотных слоях атмосферы трение и вызванный им аэродинамический нагрев становятся столь значительными, что принима-

ют специальные меры тепловой защиты для предотвращения разрушения. Задачи аэродинамического нагрева будут рассмотрены отдельно в гл. XI. Определим условия, при которых последний член в (VII-31 а) будет иметь одинаковый порядок с первым членом в правой части (VII-31 а) и его следует сохранить в уравнении. Порядок второй производной от температуры в правой части уравнения и квадрата производной $\left(\frac{\partial w'_x}{\partial y'} \right)^2$ одинаков, поэтому, для того чтобы порядок самих членов был одинаков, должны быть равны или хотя бы иметь одинаковый порядок безразмерные комплексы при названных второй производной и квадрате производной, т. е. $\frac{a}{W_\infty l} = \frac{\nu W_\infty}{c_p \Theta_\infty l}$.

Пусть $a = \nu$ или $\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = 1$, что является хорошим приближением для газов, тогда условие, при котором величиной диссипативной функции [последний член (VII-31)] пренебрегать нельзя, имеет вид

$$\frac{W_\infty^2}{c_p \Theta_\infty} = 1.$$

В размерных величинах уравнение (VII-31) может быть записано в виде

$$\rho w_x c_p \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial \theta}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2. \quad (\text{VII-31б})$$

Уравнение энергии теплового пограничного слоя для умеренных скоростей, при которых можно пренебречь величиной диссипативной функции, получим из уравнения (VII-31 а)

$$w'_x \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial \theta'}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y'^2}, \quad (\text{VII-32})$$

где $\text{Pe} = \frac{W_\infty l}{a}$ — критерий Пекле (III-22).

Член в правой части уравнения (VII-32) будет иметь порядок единицы, т. е. такой же, как и у двух других членов при условии

$$\frac{1}{\text{Pe}} \sim \Delta'^2, \quad (\text{VII-33})$$

откуда толщина теплового пограничного слоя будет величиной порядка

$$\Delta' \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Pe}}}. \quad (\text{VII-34})$$

Теперь напомним полную систему уравнений пограничного слоя в безразмерных величинах для тепловой задачи, для двумерного стационарного течения, в которую войдут: уравнение движения (VII-4)

* Тепловой пограничный слой характеризуется большим поперечным градиентом температуры, под действием которого осуществляется поперечный перенос теплоты [74].

для простоты примем в нем $dp/dx = 0$), уравнение неразрывности (VII-6) и уравнение энергии (VII-32)

$$\left. \begin{aligned} w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w'_x}{\partial y'^2} \right), \\ \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \frac{\partial w'_y}{\partial y'} &= 0, \\ w'_x \frac{\partial \vartheta'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial \vartheta'}{\partial y'} &= \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial y'^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-35})$$

Первое и третье уравнения системы (VII-35) при условии

$$\frac{1}{\text{Re}} = \frac{1}{\text{Pe}} \quad \text{или} \quad \frac{W_\infty l}{\nu} = \frac{W_\infty l}{a},$$

откуда $\nu = a$ или $\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = 1$,

будут тождественными, т. е. если для жидкости, которая омывает пластинку, число Прандтля равно единице, то кривые распределения безразмерной скорости по толщине динамического слоя и безразмерной температуры по толщине теплового слоя совершенно одинаковы (тождественны).

В размерных величинах искомое уравнение энергии для теплового пограничного слоя на пластине ($dp/dx = 0$) при умеренной скорости потока получим из (VII-31 б)

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}. \quad (\text{VII-36})$$

Составим граничные условия. Избыточная температура внешнего потока задается, обозначим ее через Θ_∞ . С учетом принятых обозначений граничные условия имеют вид:

при $y = 0$ $\vartheta = 0$;

при $y \rightarrow \infty$ $\vartheta \rightarrow \Theta_\infty$.

Ранее уже отмечалось, что в данной книге точные решения динамического пограничного слоя не рассматриваются ввиду их сложности и громоздкости, по этой же причине не будут рассматриваться и точные решения всей системы уравнений пограничного слоя, включающей уравнение энергии. Так же как и для динамического слоя, мы ограничимся рассмотрением приближенного решения тепловой задачи (полной системы уравнений пограничного слоя — движения, сплошности, энергии).

Приближенное решение уравнений динамического пограничного слоя сводится, как было установлено ранее, к решению интегрального уравнения динамического пограничного слоя.

Приближенное решение уравнения энергии для теплового пограничного слоя сводится к решению интегрального уравнения энергии.

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Выделим в потоке жидкости контрольный элемент с размерами $h > \Delta$ в направлении оси y , dx в направлении оси x и 1 в направлении оси z (рис. VII-6). Обозначим скорость набегающего потока через W_∞ , его избыточную температуру через $\Theta_\infty = T_\infty - T_w$ переменные скорость и избыточную температуру соответственно через w_x и $\vartheta = T - T_w$. Вывод интегрального уравнения для теплового пограничного слоя производится аналогично выводу интегрального уравнения для динамического пограничного слоя (VII-13), разница состоит толь-

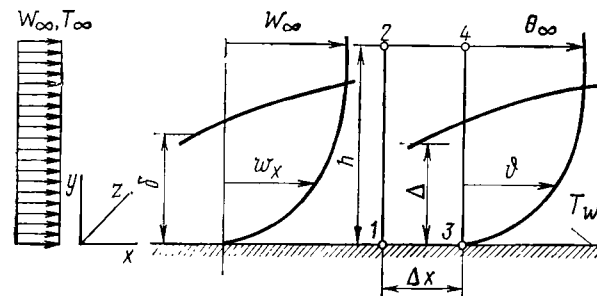


Рис. VII-6. К выводу интегрального уравнения энергии для пограничного слоя

ко в том, что вместо потоков количества движения рассматриваются потоки теплоты. Составим тепловой баланс для выделенного элемента (см. рис. VII-6).

Количество теплоты, вносимое жидкостью через грань 12, можно представить в виде

$$\rho c_p \int_0^h \vartheta w_x dy.$$

Изменение этого количества теплоты на пути dx равно

$$\rho c_p \frac{d}{dx} \left(\int_0^h \vartheta w_x dy \right) dx; \quad (\text{a})$$

это изменение можно рассматривать как разность потоков теплоты через грани 12 и 34.

Пусть расход жидкости в направлении оси x через грань 34 больше, чем через грань 12. Но при постоянной плотности эта разность расходов должна компенсироваться расходом через грань 24. Следовательно, через грань 24 будет входить жидкость в количестве, равном разности расходов через грани 12 и 34; жидкость внесет с собой теплоту, равную

$$\rho c_p \Theta_\infty \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx.$$

Количество теплоты, отданное стенке через грань 13, равно

$$-q_w dx \cdot 1 = +\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx \cdot 1.$$

Уравнение теплового баланса для выделенного элемента имеет вид

$$-\rho c_p \frac{d}{dx} \int_0^h \theta w_x dy + \rho c_p \Theta_\infty \frac{d}{dx} \int_0^h w_x dy + \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (\text{VII-37})$$

После сокращений и преобразований последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} (\Theta_\infty - \theta) w_x dy = -a \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (\text{VII-38})$$

Верхний предел h в уравнении (VII-37) может быть изменен на Δ в (VII-38), так как при $y = h > \Delta$ подынтегральное выражение в (VII-38) обращается в нуль.

Выражение (VII-38) называют интегральным уравнением энергии пограничного слоя; оно получено Г. Н. Кружилиным [43].

Метод исследования теплоотдачи с помощью интегрального уравнения энергии (VII-38) приведен в следующем параграфе.

§ 5. ТРЕНИЕ И ТЕПЛОТДАЧА В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Исследуем теплоотдачу пластины при продольном обтекании потоком постоянной скорости с помощью интегрального уравнения энергии (VII-38). Пластина имеет необогреваемый начальный участок длиной x_0 , температура которого равна температуре основного потока T_∞ ; температура обогреваемой части пластины равна T_0 , причем $T_0 > T_\infty$ (рис. VII-7).

Пусть движение жидкости в пограничном слое на поверхности пластины — ламинарное; динамический пограничный слой начинает развиваться от передней кромки пластины ($x = 0$), а тепловой пограничный слой — от начала обогреваемого участка ($x = x_0$). Определить коэффициент теплоотдачи в этих условиях путем непосредственного интегрирования уравнений пограничного слоя, т. е. получить точное решение, трудно. Решим задачу приближенно. Определим коэффициент теплоотдачи пластины (рис. VII-6) потоку жидкости, решив интегральное уравнение энергии (VII-38) для случая $Pr \geq 1$ (для газов $Pr < 1$, для жидких металлов $Pr \rightarrow 0$, для капельных жидкостей $Pr > 1$, для масел $Pr \rightarrow \infty$).

Путем анализа системы уравнений движения и энергии для плоского потока получено [88].

$$\frac{\Delta}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}. \quad (\text{VII-39})$$

Из (VII-39) следует, что при $Pr \geq 1$, $\delta \geq \Delta$, т. е. в нашем случае толщина динамического пограничного слоя больше или равна толщине теплового пограничного слоя.

Для решения интегрального уравнения энергии (VII-38) необходимо выбрать профиль температуры поперек пограничного слоя так, чтобы он как можно лучше совпадал с реальным и удовлетворял бы следующим граничным условиям:

при $y = 0$, $T = T_0$;

при $y = \infty$, $T = T_\infty$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$.

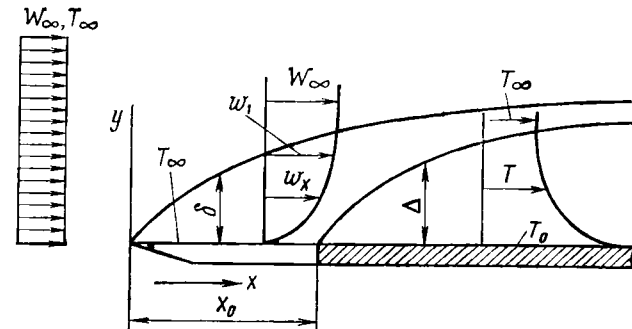


Рис. VII-7. Динамический и тепловой пограничные слои соответственно с толщинами δ и Δ при продольном обтекании пластины с необогреваемым начальным участком длиной $x = x_0$

кроме того, из уравнения энергии для плоского пограничного слоя (VII-36), написанного для умеренных скоростей (диссипативная функция $\Phi_w = 0$) через абсолютную температуру,

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

при $y = 0$ следует $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$.

Сопоставляя граничные условия для интегральных уравнений (VII-19) и (VII-38), замечаем, что они аналогичны, поэтому в качестве профиля температуры выбираем такой же по форме полином, как и для профиля скорости (VII-20)

$$T = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Представим профиль температуры в относительных величинах. С учетом обозначений $\theta = T - T_0$ и $\Theta = T_\infty - T_0$ по аналогии с (VII-21) профиль температуры имеет вид

$$\frac{\theta}{\Theta} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^3. \quad (\text{VII-40})$$

Вычислим интеграл, входящий в левую часть уравнения (VII-38). Для этого подставим в подынтегральную функцию значения ϑ из (VII-40) и w_x из (VII-21); произведем интегрирование в пределах пограничного слоя (при $y > \Delta$ подынтегральная функция равна нулю); введем обозначение $r = \frac{\Delta}{\delta}$ (напомним, что в нашем случае $r \leq 1$). В результате получим

$$\int_0^{\delta} (\Theta - \vartheta) w_x dy = \Theta_{\infty} W_{\infty} \int_0^{\delta} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^3 \right] \times \\ \times \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \Theta_{\infty} W_{\infty} \left(\frac{3}{20} r^2 - \frac{3}{280} r^4 \right).$$

Учитывая, что $\frac{3}{20} r^2 \gg \frac{3}{280} r^4$, принимаем $\frac{3}{280} r^4 = 0$; тогда левая часть интегрального уравнения энергии (VII-38) может быть представлена в следующей форме:

$$\frac{3}{20} \Theta_{\infty} W_{\infty} \frac{d}{dx} (r^2 \delta).$$

Вычислим правую часть уравнения (VII-38), для этого продифференцируем выражение (VII-40) по y и, полагая $y = 0$, получим искомый результат. Подставляя результаты вычислений для левой и правой части интегрального уравнения энергии в (VII-38), получим

$$\frac{3}{20} \Theta_{\infty} W_{\infty} \frac{d}{dx} (r^2 \delta) = \frac{3}{2} a \frac{\Theta_{\infty}}{r \delta}.$$

После дифференцирования и сокращения последнее выражение имеет вид

$$\frac{1}{10} W_{\infty} \left(r^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2r^2 \delta^2 \frac{dr}{dx} \right) = a.$$

Используя результаты, полученные в ходе решения интегрального уравнения динамического пограничного слоя для δ и $d\delta$, приведем это выражение к виду

$$r^3 + 4r^2 \frac{dr}{dx} = \frac{13/14}{v/a}.$$

Принимая в последнем выражении $13/14 = 1$ и учитывая, что $\frac{v}{a} = \text{Pr}$, получим

$$r^3 + 4r^2 \frac{dr}{dx} = \frac{1}{\text{Pr}}.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$r^3 = Cx^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\text{Pr}}.$$

Определим постоянную интегрирования C с помощью граничных условий $r = 0$ при $x = x_0$ и подставим ее значение в общее решение. В результате получим

$$r = \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}. \quad (\text{VII-41})$$

Если пластина нагревается по всей длине, т. е. необогреваемого участка нет, то $x_0 = 0$ и (VII-41) принимает вид

$$r = \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}.$$

Формула (VII-41) получена для $\text{Pr} \geq 1$, однако она дает удовлетворительные результаты и для $0,5 \leq \text{Pr} \leq 1$ [36].

Теперь определим плотность теплового потока q от пластины к жидкости. Для ламинарного пограничного слоя на основании законов Фурье (I-3а) и Ньютона (I-7) имеем

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha_x \Theta_{\infty}.$$

Используя зависимости для профиля температуры $\vartheta/\Theta_{\infty}$ (VII-40), толщины динамического пограничного слоя δ (VII-23) и отношения $r = \frac{\Delta}{\delta}$ (VII-41), из последнего выражения получим формулы для определения локальных коэффициентов теплоотдачи α_x и числа Нуссельта Nu_x [36]:

$$\alpha_x = \frac{0,322 \lambda \text{Pr}^{1/3}}{\sqrt{\frac{vx}{W_{\infty}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}}}, \\ \text{Nu}_x = \frac{0,322 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{\left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}}. \quad (\text{VII-42})$$

Для случая, когда пластина обогревается по всей длине, т. е. необогреваемого участка нет ($x_0 = 0$), формула (VII-42) примет вид

$$\text{Nu}_x = 0,323 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (\text{VII-43})$$

В результате точного решения уравнений ламинарного пограничного слоя для $\text{Pr} = 1$ получена формула, отличающаяся от (VII-43) только постоянным коэффициентом

$$\text{Nu}_x = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (\text{VII-44})$$

Формулу для определения среднего числа Нуссельта на пластине длиной l и шириной l получают, используя следующее соотношение

$$\bar{Nu} = \frac{1}{l} \int_0^l Nu_x dx.$$

Подставляя значение Nu_x из выражения (VII-43) в последнее соотношение, получим искомую формулу*

$$\bar{Nu} = 0,646 Re^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (VII-45)$$

Покажем, что между локальным коэффициентом теплоотдачи и локальным коэффициентом трения c_f имеется связь. Для этого разделим обе части уравнения (VII-44) на произведение двух критериев $Pr \cdot Re$

$$\frac{Nu_x}{Pr \cdot Re} = \frac{0,332}{\sqrt{Re} Pr^{2/3}}. \quad (VII-46)$$

Левая часть полученного соотношения представляет собой безразмерный комплекс, который называют числом Стантона и обозначают

$$St = \frac{Nu_x}{Pr \cdot Re} = \frac{\alpha_x}{\rho c_p W_\infty} = \frac{q}{\rho W_\infty c_p (T_\infty - T_w)}. \quad (VII-47)$$

С учетом принятого обозначения и формулы (VII-46) выражение (VII-47) можно представить в следующем виде:

$$St = \frac{c_f}{2} \frac{1}{Pr^{2/3}}. \quad (VII-48)$$

Для случая, когда критерий Прандтля $Pr = 1$

$$St = \frac{c_f}{2}. \quad (VII-48a)$$

Зависимость между средним числом Стантона $\bar{St} = \frac{\bar{\alpha}}{\rho c_p W_\infty}$ (здесь $\bar{\alpha}$ — средний коэффициент теплоотдачи) и средним коэффициентом трения C_f для $Pr = 1$ имеет вид

$$\bar{St} = \frac{1}{2} C_f. \quad (VII-48b)$$

§ 6. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Рассмотрим некоторые особенности турбулентного, двумерного потока несжимаемой жидкости.

Измерения показали, что в каждой точке турбулентного потока несжимаемой жидкости скорость и давление являются пульсирующими

величинами. В сжимаемой жидкости пульсирующими величинами являются скорость, давление, плотность и температура.

Измененное значение пульсирующей физической величины в данной точке турбулентного потока называют **актуальными значениями**. Актуальные значения скорости и давления изменяются по времени хаотически, случайным образом, становясь больше или меньше некоторого среднего значения. В любой точке потока не наблюдается повторяемости комбинаций актуальных значений составляющих скорости w_x, w_y, w_z ; существует лишь вероятностная зависимость между актуальными значениями скоростей для двух любых точек в потоке.

Такой статистический характер величин, характеризующих поток, создает очень большие трудности при его исследовании.

Актуальные значения составляющих скорости для двумерного потока жидкости w_x и w_y можно представить в виде

$$w_x = \bar{w}_x + w'_x, \quad (VII-49a)$$

$$w_y = \bar{w}_y + w'_y, \quad (VII-49b)$$

где $\bar{w}_x, \bar{w}_y$ — осредненные значения скорости;
 w'_x, w'_y — пульсации скорости.

Осредненным значением физической величины называют среднее значение актуальной физической величины за некоторый интервал времени, выбранный таким образом, чтобы осредненное значение не зависело от величины интервала.

Пульсация физической величины есть разность между актуальным и осредненным значением физической величины.

Актуальное значение давления можно представить в виде

$$p = \bar{p} + p'. \quad (VII-49b)$$

Осредненное значение скорости в заданной точке турбулентного потока находят следующим образом:

$$\bar{w}_x = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} w_x dt,$$

где t_1 — промежуток времени, значительно больший, чем период одной пульсации.

Степенью турбулентности называют отношение средней квадратичной пульсации составляющих вектора скорости в данной точке турбулентного потока к осредненному значению скорости в той же точке

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(\bar{w}_x'^2 + \bar{w}_y'^2)}{\bar{w}}}$$

Степень турбулентности оказывает существенное влияние на интенсивность переноса количества движения и теплоты в турбулентном потоке; это влияние будет рассмотрено в гл. VIII.

* Здесь порядок вывода такой же, как для формулы (VII-28).

Теперь рассмотрим течение жидкости вдоль пластины (рис. VII-8). У ее передней кромки, как уже отмечалось, образуется ламинарный пограничный слой с толщиной δ . На расстоянии $x_{кр}$ от передней кромки режим движения в пограничном слое становится переходным. Форма движения жидкости, промежуточная между ламинарной и турбулентной, называется **переходным режимом движения**. Область пограничного слоя, на протяжении которой режим движения переходный, называется **переходной зоной** (рис. VII-8).

В конце переходной зоны образуется турбулентный пограничный слой с толщиной $\delta_{тб}$. Однако в непосредственной близости от стенки сохраняется ламинарный режим движения. Область потока в турбулентном пограничном слое с толщиной $\delta_{л}$ (рис. VII-8), где сохраняется ламинарный режим движения, называется **ламинарным, или вязким, подслоем**.

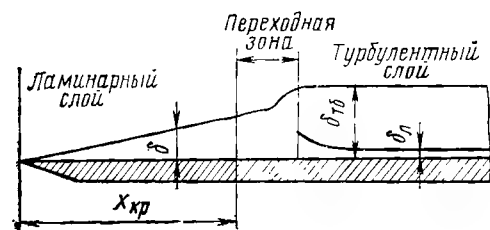


Рис. VII-8. Ламинарный и турбулентный пограничные слои и вязкий подслой соответственно с толщинами δ , $\delta_{тб}$ и $\delta_{л}$ при продольном обтекании пластины

ном пограничном слое сложнее, чем в свободном потоке. Например, степень турбулентности ϵ становится переменной величиной; она уменьшается по мере уменьшения расстояния от стенки, так как соответствующим образом изменяются осредненное значение скорости $\bar{w}$ и пульсации скорости $\bar{w}_x$ и $\bar{w}_y$. В ламинарном подслое пульсации исчезают и понятие осредненной скорости теряет смысл; у стенки, при $y = 0$ скорости w_x и w_y равны нулю.

Механизм переноса теплоты в турбулентном пограничном слое значительно сложнее, чем в ламинарном, и пока еще не совсем ясен.

В ламинарном пограничном слое теплота переносится путем теплопроводности и конвекции. В пристенной части пограничного слоя, где скорость жидкости очень мала, теплота переносится в основном теплопроводностью. С увеличением расстояния от стенки (в пределах пограничного слоя) продольная скорость потока увеличивается и вместе с ней увеличивается интенсивность переноса теплоты конвекцией. В турбулентном пограничном слое, в его турбулентной части в результате пульсаций скорости происходит непрерывное перемешивание макрочастиц жидкости. Если в пограничном слое имеется поперечный градиент температуры, то процесс перемешивания приводит к дополнительному переносу теплоты. Перенос теплоты через турбулентный пограничный слой более интенсивен, чем через ламинарный.

На основании исследований установлено, что для определения коэффициента теплоотдачи α в турбулентном пограничном слое можно

использовать данные, полученные в результате измерения гидродинамических величин. Методы определения коэффициента α , основанные на этом факте, составляют содержание гидродинамической теории теплообмена.

Гидродинамическая теория теплообмена

Рассмотрим метод определения коэффициента теплоотдачи в турбулентном пограничном слое по известному коэффициенту трения, предложенный О. Рейнольдсом.

Пусть по каналу с плоскими стенками, расстояние между которыми равно $2h$, движется турбулентный поток жидкости. Расположим оси координат следующим образом: ось x совместим с осью канала; ось y направим от оси канала перпендикулярно к стенке. Пусть течение происходит с постоянным вдоль оси канала градиентом давления, тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$\tau = \tau_w \frac{y}{h}, \quad (\text{VII-50})$$

где τ — касательное напряжение, переменное по длине h ;

τ_w — касательное напряжение на стенке.

Итак, при течении в канале с плоскими стенками распределение касательного напряжения по его высоте h линейное (VII-50). Такое обстоятельство значительно упрощает определение искомой зависимости между коэффициентами теплоотдачи и трения.

Для ламинарного течения справедливы следующие соотношения

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{dw_x}{dy}, \quad (\text{VII-51a})$$

$$\frac{q}{\rho c} = a \frac{d\vartheta}{dy}. \quad (\text{VII-51б})$$

Напомним, что здесь:

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости;

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$ — коэффициент температуропроводности;

$\vartheta = T - T_w$ — температура, избыточная по отношению к температуре стенки T_w ;

T — температура, переменная по толщине пограничного слоя.

Соотношения (VII-51 а, б) получены соответственно на основании законов (I-17) и (I-3 а).

Рассматриваемый метод О. Рейнольдса основан на нескольких допущениях.

Первое допущение состоит в том, что для турбулентного течения форма соотношений (VII-51 а, б) сохраняется, но в них следует заменить ламинарные коэффициенты переноса ν и a на турбулентные. Для турбулентного течения (с учетом сказанного) соотношения (VII-51 а, б) примут вид

$$\frac{\tau}{\rho} = \epsilon_{\sigma} \frac{dw_x}{dy}, \quad (\text{VII-52a})$$

$$\frac{q}{\rho c} = \epsilon_q \frac{d\vartheta}{dy}, \quad (\text{VII-52б})$$

где $\epsilon_{\sigma} = \frac{A_{\sigma}}{\rho}$ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости;

$\epsilon_q = \frac{A_q}{\rho c}$ — турбулентный коэффициент теплопроводности.

Отметим, что коэффициенты переноса при ламинарном течении ν и a зависят от физических свойств жидкости, тогда как соответствующие коэффициенты при турбулентном течении ϵ_{σ} и ϵ_q зависят от параметров потока в данной точке.

Третье допущение состоит в том, что коэффициенты турбулентного переноса ϵ_{σ} и ϵ_q считаются одинаковыми для каждой точки исследуемого потока, т. е. $\epsilon_{\sigma} = \epsilon_q$; это допущение составляет сущность метода, который иногда называют «аналогией Рейнольдса». Путем деления выражения (VII-52 а) и (VII-52 б) с учетом третьего допущения О. Рейнольдса получим

$$\frac{\tau c}{q} = \frac{dw_x}{d\vartheta}. \quad (\text{VII-53})$$

В рассматриваемом канале касательное напряжение изменяется линейно согласно (VII-50). Нетрудно доказать, что плотность теплового потока от оси канала до стенки будет изменяться также линейно.

Для того чтобы связать коэффициент трения с коэффициентом теплоотдачи, необходимо записать (VII-53) для условий на стенке [36]

$$\frac{\tau_w c}{q_w} = \frac{dw_x}{d\vartheta} \Big|_w. \quad (\text{VII-54})$$

В результате интегрирования уравнения (VII-54) с учетом, что его левая часть есть постоянная величина, при следующих граничных условиях:

при $y = 0$, $w_x = 0$, $\vartheta = T - T_w = 0$;

при $y = h$, $w_x = W_0$, $\vartheta_0 = T_0 - T_w$ (здесь W_0 , T_0 — скорость и температура на оси канала) получим

$$\frac{\tau_w c}{q_w} = \frac{W_0}{\vartheta_0}. \quad (\text{VII-55})$$

Профили скорости и температуры по сечению рассматриваемого канала изменяются мало (исключая пограничный слой), поэтому допустим,

что средние по сечению канала значения скорости $W_{\text{ср}}$ и температура $T_{\text{ср}}$ равны их значениям на его оси W_0 и T_0 . Используя вместо средних значений скорости и температуры их значения на оси канала, можно написать

$$\tau_w = C_f \frac{\rho W_0^2}{2}, \quad (\text{VII-56a})$$

$$q_w = \bar{\alpha} \vartheta_0; \quad (\text{VII-56б})$$

и

$$\tau_w(x) = c_f \frac{\rho W_0^2}{2}, \quad (\text{VII-57a})$$

$$q_w = \alpha_x \vartheta_0, \quad (\text{VII-57б})$$

где C_f и c_f — среднее и локальные значения коэффициентов трения; $\bar{\alpha}$ и α_x — среднее и локальные значения коэффициентов теплоотдачи.

Совмещая (VII-55) и (VII-56 а, б), а затем (VII-55) и (VII-57 а, б), получим

$$\text{St} = \frac{1}{2} C_f, \quad (\text{VII-58a})$$

$$\text{St}_x = \frac{1}{2} c_f. \quad (\text{VII-58б})$$

По формулам (VII-58 а, б) можно определить средний $\bar{\alpha}$ и локальный α_x коэффициенты теплоотдачи, если известны соответственно средний C_f и локальный c_f коэффициенты трения.

Коротко познакомившись с некоторыми особенностями переноса количества движения и теплоты в турбулентном потоке, перейдем к обсуждению уравнений турбулентного пограничного слоя.

§ 7. УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для турбулентного пограничного слоя (рассматривается двумерный поток), так же как и для ламинарного, можно вывести уравнения пограничного слоя, если вместо величин, входящих в уравнения движения (II-29, II-30 и II-31), сплошности (II-7) и энергии (II-52), подставить их значения в виде суммы средней величины и пульсации (VII-49 а, б, в). Далее путем некоторых преобразований, анализа порядка величин и отбрасывания малых получены уравнения движения, сплошности и энергии для турбулентного пограничного слоя. Опуская вывод [88], приведем перечисленные уравнения.

Уравнение движения турбулентного двумерного пограничного слоя для стационарного* течения несжимаемой жидкости вдоль пластины ($\frac{dp}{dx} = 0$ для x -компонента) имеет вид

$$\bar{\rho} \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{\rho} \bar{w}'_y \bar{w}'_x). \quad (\text{VII-59})$$

Для того чтобы сделать уравнение (VII-59) замкнутым, введем, следуя Рейнольдсу, предположение о том, что член, содержащий пульсационные скорости $\bar{w}'_x$ и $\bar{w}'_y$, пропорционален градиенту средней скорости $\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}$

$$-\bar{\rho} \bar{w}'_y \bar{w}'_x = A_\sigma \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right). \quad (\text{VII-60})$$

Величину A_σ называют коэффициентом турбулентной вязкости. С учетом (VII-60) уравнение (VII-59) можно записать в другом виде

$$\bar{\rho} \bar{w}_x \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} \right) + \bar{\rho} \bar{w}_y \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_\sigma \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) \quad (\text{VII-61})$$

или

$$\bar{\rho} \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + A_\sigma) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right]. \quad (\text{VII-62})$$

Отметим здесь весьма важную особенность турбулентного течения — пульсационное движение со скоростями $\bar{w}'_x$ и $\bar{w}'_y$ оказывает влияние на осредненное движение со скоростями $\bar{w}_x$, $\bar{w}_y$ таким образом, что в осредненном движении как бы увеличивается вязкость. Следовательно, полную вязкость турбулентного потока можно рассматривать как сумму двух величин — молекулярную вязкость и дополнительную вязкость, обусловленную турбулентностью.

Для сравнения приведем здесь уравнение движения ламинарного пограничного слоя (VII-10) (x — компонент); в случае $\frac{dp}{dx} = 0$ оно имеет вид

$$\bar{\rho} \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right). \quad (\text{VII-63})$$

* Турбулентное течение в принципе нестационарно, так как непрерывно происходят пульсации скорости. Однако за количественные характеристики потока принимаются осредненные значения величин, например, для скорости — осредненное значение $\bar{w}_x$. Поэтому будем называть турбулентное течение *стационарным*, если осредненные значения величин, например скорости $\bar{w}_x$, не меняются с течением времени.

Сопоставляя уравнения движения для турбулентного пограничного слоя (VII-61) и для ламинарного (VII-63), замечаем, что в первом появился дополнительный член, который представляет собой кажущееся напряжение или турбулентное касательное напряжение в несжимаемой жидкости

$$\sigma_{\tau\delta} = A_\sigma \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) = -\bar{\rho} \bar{w}'_y \bar{w}'_x. \quad (\text{VII-64})$$

Величина A_σ характеризует интенсивность турбулентного переноса количества движения.

Допустим, что молекулярный и турбулентный переносы количества движения протекают независимо друг от друга, тогда полное касательное напряжение τ_π можно представить как сумму двух величин: касательного напряжения τ , обусловленного взаимодействием между молекулами, и касательного напряжения $\sigma_{\tau\delta}$, обусловленного взаимодействием между отдельными объемами жидкости макроскопического размера, движущимися как единое целое; предполагается, что такие объемы возникают в турбулентном потоке; они ведут себя как отдельные молекулы.

Полное касательное напряжение равно

$$\tau_\pi = \tau + \sigma_{\tau\delta} = (\mu + A_\sigma) \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right), \quad (\text{VII-65})$$

Уравнение движения для турбулентного пограничного слоя в проекции на ось y по аналогии с (VII-9) имеет вид

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0. \quad (\text{VII-66})$$

Уравнение сплошности

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{w}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}'_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-67})$$

Из (VII-67) видно, что уравнение сплошности удовлетворяется как для осредненных, так и для пульсационных скоростей.

Уравнение энергии для турбулентного двумерного пограничного слоя в несжимаемой жидкости имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{w}_x c_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{w}_y c_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (-c_p \bar{\rho} \bar{w}'_y \bar{\theta}') - \bar{\rho} \bar{w}'_y \bar{w}'_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}; \end{aligned} \quad (\text{VII-68})$$

с учетом (VII-60) получим

$$\rho \bar{w}_x c_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \rho \bar{w}_y c_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) + (\mu + A_\sigma) \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} (-c_p \rho \bar{w}_y' \bar{\theta}'). \quad (\text{VII-69})$$

Пусть

$$-c_p \rho \bar{w}_y' \bar{\theta}' = A_q \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right). \quad (\text{VII-70})$$

С учетом (VII-70) уравнение (VII-69) можно переписать в виде

$$\rho \bar{w}_x c_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \rho \bar{w}_y c_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + A_q) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right] + (\mu + A_\sigma) \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2. \quad (\text{VII-71})$$

Уравнение (VII-71) называют уравнением энергии для турбулентного пограничного слоя.

Для умеренных скоростей можно принять

$$(\mu + A_\sigma) \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

тогда из (VII-71) следует, что полный тепловой поток q_Π через турбулентный пограничный слой можно представить в виде суммы тепловых потоков, возникающих в результате действия молекулярной теплопроводности в пограничном слое q и турбулентной $q_{\tau 6}$

$$q_\Pi = q + q_{\tau 6} = (\lambda + A_q) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}. \quad (\text{VII-72})$$

Величина A_q характеризует интенсивность турбулентного переноса теплоты; ее называют коэффициентом турбулентной теплопроводности.

Для сравнения уравнений энергии турбулентного (VII-71) и ламинарного (VII-29 б) пограничных слоев приведем последнее в следующей форме (VII-29 в):

$$\rho w_x c_p \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2.$$

Сравнивая уравнения (VII-71) и (VII-29 в), замечаем, что в первом появились два дополнительных члена: *первый*

$$A_\sigma \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2$$

представляет собой диссипативную функцию, или теплоту, возникающую в турбулентном пограничном слое в результате действия турбулентной вязкости;

второй

$$A_q \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) = -c_p \rho \bar{w}_y' \bar{\theta}'$$

представляет собой тепловой поток, обусловленный действием турбулентной теплопроводности.

Введем понятие турбулентного критерия Прандтля в виде

$$\text{Pr}_{\tau 6} = \frac{c_p A_\sigma}{A_q} = \frac{\varepsilon_\sigma}{\varepsilon_q}. \quad (\text{VII-73})$$

Напомним, что

$\varepsilon_\sigma \equiv \frac{A_\sigma}{\rho}$ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости;

$\varepsilon_q \equiv \frac{A_q}{\rho c_p}$ — коэффициент турбулентной температуропроводности.

Результаты решения уравнений турбулентного пограничного слоя получены при следующих допущениях: числа Прандтля в турбулентном пограничном слое $\text{Pr}_{\tau 6}$ (VII-73) и в ламинарном подслое Pr равны единице; члены, учитывающие ламинарные значения λ и μ , опущены, так как принимаем, что $\mu \ll A_\sigma$, $\lambda \ll A_q$. С учетом принятых допущений решение можно представить в форме

$$\text{St} = \frac{1}{2} c_f \text{ или } \overline{\text{St}} = \frac{1}{2} C_f. \quad (\text{VII-74})$$

Полученный результат совпадает с аналогичным для ламинарного слоя (VII-48 а и VII-48 б), однако величины коэффициентов трения c_f и C_f , входящих в (VII-48 а и VII-48 б) и (VII-74), и способ их определения различны.

Выведем формулу для определения коэффициента трения c_f в турбулентном пограничном слое. По определению коэффициент трения равен (VII-25)

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho W_\infty^2}.$$

Величину τ_w можно найти по формуле (VII-64), если допустить, что турбулентное касательное напряжение сразу за пределами ламинарного подслоя равно касательному напряжению на стенке

$$\tau_w = \sigma_{\tau 6} = A_\sigma \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)_{y=0}.$$

Коэффициент турбулентной вязкости определяем из уравнения (VII-64)

$$A_\sigma = \frac{-\rho \bar{w}_y' \bar{w}_x'}{\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}}.$$

Непосредственные измерения этой величины показали, что она имеет сложную зависимость от скорости w_x в пограничном слое, что затрудняет ее использование при расчетах.

Следует обратить особое внимание на следующее обстоятельство. Несмотря на то, что динамические коэффициенты вязкости μ и турбулентной вязкости A_σ формально схожи, но по своей физической природе они различны. Первый является функцией состояния жидкости, а второй зависит от режима движения.

Полуэмпирическая теория турбулентности

Прандтль предложил более удобную формулу для определения турбулентного касательного напряжения $\sigma_{\tau 6}$ по сравнению с (VII-64), где A_σ — сложная функция скорости. Прандтлю удалось заменить коэффициент A_σ величинами, имеющими более простую зависимость от скорости. Рассмотрим вывод формулы для определения касательного напряжения в турбулентном потоке, предложенный Прандтлем, на примере течения в прямоугольном канале. В этом простом течении выполняются следующие условия для составляющих осредненной скорости (рис. VII-9):

$$\bar{w}_x = f(y), \quad \bar{w}_y = 0, \quad \bar{w}_z = 0.$$

Следуя Прандтлю, будем считать, что в турбулентном потоке непрерывно возникают некоторые обособленные элементарные объемы жидкости, которые перемещаются в произвольном направлении с собственной скоростью, проходят некоторый путь длиной l , после чего рассеиваются; в процессе перемещения на длине l эти элементарные объемы сохраняют неизменным x -компонент своего импульса. Путь, проходимый таким объемом жидкости от момента возникновения до момента рассеивания, Прандтль назвал длиной пути смешения. Отметим, что длина пути смешения l — величина переменная, она зависит от координаты y (рис. VII-9). Пусть обособленный элементарный объем жидкости переместится из плоскости, расположенной на расстоянии $y - l$ от стенки, в плоскость, расположенную на расстоянии y от стенки (рис. VII-9), при этом $w'_y > 0$. В плоскости y продольная скорость этого обособленного объема будет меньше, чем скорость окружающей его жидкости. Появление обособленного объема в плоскости y вызывает пульсацию продольной скорости, которая пропорциональна величине

$$l \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right).$$

При перемещении обособленного элементарного объема жидкости из плоскости $y + l$ в плоскость y (при этом $w'_y < 0$) его продольная скорость будет больше, чем скорость окружающей жидкости. Появление обособленного объема жидкости в плоскости y вызовет пульсацию продольной скорости, которая пропорциональна величине

$$l \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right).$$

Абсолютное среднее значение пульсации скорости вдоль оси x будет равно полусумме двух рассмотренных пульсаций, так как положительные и отрицательные пульсации скорости имеют одинаковую вероятность и происходят одинаково, поэтому

$$|w'_x| = l \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right|.$$

Можно показать, что абсолютное среднее значение пульсации скорости вдоль оси y равно

$$|w'_y| = l \frac{d\bar{w}_x}{dy} \quad (\text{VII-75})$$

и

$$\overline{w'_x w'_y} = l^2 \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)^2.$$

Формулы для определения касательного напряжения в турбулентном потоке получим, совмещая последнее выражение и соотношение (VII-64) [88]

$$\sigma_{\tau 6} = -\rho \overline{w'_y w'_x} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)^2.$$

Для условий пограничного слоя, при умеренных значениях числа Прандтля Pr , можно принять $l = \kappa y$, где

κ — универсальный коэффициент пропорциональности, не зависящий от Re ; определяется экспериментально; $\kappa = 0,39 \div 0,40$; l — средняя статистическая длина пути смешения.

Последняя формула в форме, предложенной Прандтлем, имеет вид

$$\sigma_{\tau 6} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right| \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right|. \quad (\text{VII-76})$$

Выражение (VII-76) наглядно отображает очевидное положение о том, что с изменением знака производной $\frac{d\bar{w}_x}{dy}$ должен меняться знак касательного напряжения $\sigma_{\tau 6}$. Полученное выражение (VII-76) имеет некоторое преимущество по сравнению с (VII-64). Поясним это обстоятельство. Сопоставляя выражения (VII-76) и (VII-64), найдем выражение для коэффициента турбулентной вязкости

$$A_\sigma = \rho l^2 \frac{d\bar{w}_x}{dy}. \quad (\text{VII-77})$$

Исследования показали, что величина l является функцией координаты y и не зависит от скорости $\bar{w}_x$; значит зависимость коэффициента A_σ от скорости $\bar{w}_x$ проявляется только через производную $\frac{d\bar{w}_x}{dy}$, т. е. она выражена конкретно и относительно просто. В формуле (VII-64) зависимость A_σ от скорости значительно сложнее и практически до настоящего времени не ясна.

В результате пульсационного движения жидкости происходит дополнительный перенос как количества движения, так и теплоты.

Представим тепловой поток, вызванный турбулентной теплопроводностью (VII-70), в форме

$$-\overline{\rho w_y' h'} = q_{\tau b}, \quad (\text{VII-78})$$

где $h' = c_p \vartheta'$ — пульсация энтальпии жидкости.

Предположим, что пульсацию энтальпии можно выразить через ее среднее значение следующим образом:

$$h' = l_\tau \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right),$$

где l_τ — длина пути смещения для теплового потока.

Теперь выражение для теплового потока с учетом (VII-75) можно представить в виде

$$-\overline{\rho w_y' h'} = q_{\tau b} = \rho l l_\tau \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}. \quad (\text{VII-79})$$

Выражение (VII-79) выводится на основании рассуждений, аналогичных тем, которые делают при выводе выражения (VII-76).

Формулы (VII-76) и (VII-79) являются основными соотношениями полуэмпирической теории турбулентности [15].

Метод исследования теплообмена с помощью основных соотношений полуэмпирической теории турбулентности рассмотрен в § 9 настоящей главы.

Универсальный закон распределения скорости

Рассмотрим пристенную область течения в канале с плоскими стенками. Рассматриваемая пристенная область включает в себя ламинарный подслой и очень тонкий слой турбулентного потока над ним; общая толщина этой области много меньше расстояния от стенки до оси канала h . При выводе закона распределения скорости в пристенной области Прандтль сделал два допущения:

первое — длина пути смещения l возрастает линейно с увеличением расстояния от поверхности стенки

$$l = \kappa y,$$

где κ — безразмерный постоянный коэффициент пропорциональности, определяемый из опыта;

второе — касательное напряжение в пристенной области остается неизменным и равным касательному напряжению на стенке

$$\sigma_{\tau b} = \tau_w.$$

С учетом этих допущений формулу Прандтля (VII-76) представим в виде

$$\tau_w = \rho_w \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)^2.$$

или

$$\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} = \kappa y \frac{d\bar{w}_x}{dy}, \quad (\text{VII-76a})$$

где ρ_w — плотность жидкости на стенке.

Величину в левой части полученного выражения называют *динамическим коэффициентом* на стенке и обозначают через v_* . Разделяя переменные с учетом принятого обозначения, получим

$$d\bar{w}_x = \frac{v_*}{\kappa} \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, найдем

$$\bar{w}_x = \frac{v_*}{\kappa} \ln y + C. \quad (\text{VII-80})$$

Постоянную C находят, используя граничные условия на стенке, так как при этом удастся сомкнуть распределение скорости в турбулентной части пристенной области и распределение скорости в ламинарном подслое, т. е. сомкнуть их в окрестности верхней границы ламинарного подслоя, где ламинарное и турбулентное касательные напряжения одного порядка.

Следуя Шлихтингу [88], определим постоянную интегрирования C в (VII-80) из условия, что на некотором расстоянии y_0 от стенки (величина y_0 одного порядка с толщиной ламинарного подслоя) скорость жидкости равна нулю ($\bar{w}_x = 0$), тогда

$$C = -\frac{v_*}{\kappa} \ln y_0.$$

Подставим значение C в (VII-80)

$$\bar{w}_x = \frac{v_*}{\kappa} (\ln y - \ln y_0).$$

Принимая, что

$$y_0 = \beta \frac{v}{v_*}$$

(здесь β — безразмерная постоянная), представим последнее выражение в виде

$$\frac{\bar{w}_x}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y v_*}{v} - \ln \beta \right). \quad (\text{VII-81})$$

Выражение (VII-81) представляет собой зависимость безразмерной скорости $\bar{w}_x/v_*$ от безразмерного расстояния yv_*/ν вдоль оси y . В уравнении (VII-81) постоянные κ и β определены экспериментально при исследовании течения в трубах, поэтому их значения будут приведены в § 10 настоящей главы. С учетом обозначений

$$\frac{\bar{w}_x}{v_*} = \varphi, \quad \frac{yv_*}{\nu} = \eta, \quad A_1 = \frac{1}{\kappa}, \quad D_1 = -\frac{1}{\kappa} \ln \beta$$

выражение (VII-81) можно представить в форме

$$\varphi(\eta) = A_1 \ln \eta + D_1. \quad (\text{VII-82})$$

Формула (VII-82) составляет содержание универсального закона распределения скоростей, справедливого как для течения вдоль пластины (течение в канале), так и для течения в круглой трубе.

Закон (VII-82) используется при исследовании процессов трения и теплоотдачи, он хорошо подтверждается экспериментально.

Отметим, что при выводе закона (VII-82) в турбулентной части пристенной области потока учитывалось только турбулентное касательное напряжение и не учитывалось ламинарное, поэтому формула (VII-82) дает лучшие результаты для потоков с большими числами Рейнольдса, в которых преобладают турбулентные касательные напряжения, а ламинарные малы и их влиянием можно пренебречь.

При умеренных числах Рейнольдса получен степенной закон распределения скорости, который учитывает ламинарные напряжения; его можно представить в форме

$$\varphi(\eta) = C\eta^{1/n}. \quad (\text{VII-83})$$

Показатель степени $1/n$ равен примерно $1/7$ и почти не зависит от числа Рейнольдса. Величина C зависит от n .

§ 8. ТРЕНИЕ И ТЕПЛОТДАЧА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Выведем формулу для определения локального коэффициента трения в турбулентном пограничном слое на пластине. Для этого вначале найдем зависимость толщины динамического турбулентного пограничного слоя $\delta_{\text{тб}}$ от параметров потока жидкости (числа $Re = \frac{W_\infty x}{\nu}$). Эту зависимость $\delta_{\text{тб}} = f(Re_x)$ находят путем решения интегрального уравнения динамического турбулентного пограничного слоя, которое в осредненных величинах имеет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_{\text{тб}}} (W_\infty - \bar{w}_x) \bar{w}_x dy = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad (\text{VII-84})$$

где $\delta_{\text{тб}}$ — толщина динамического турбулентного пограничного слоя;
 $W_\infty = w_1$ — скорость набегающего потока, равна скорости на внешней границе пограничного слоя.

Отметим, что соотношение (VII-84), написанное через осредненные скорости, не отличается от аналогичного (VII-19) для ламинарного пограничного слоя. В дальнейшем при решении (VII-84) знак осреднения будет опущен.

Чтобы решить (VII-84), необходимо подобрать функцию распределения скорости по толщине пограничного слоя $w_x = f(y)$ и подставить ее в интеграл, так же как это было сделано при решении интегрального соотношения (VII-19) для ламинарного пограничного слоя. Рассмотрим наиболее простой случай умеренных чисел Рейнольдса, для которого можно взять функцию распределения скорости (VII-83)

$$\frac{w_x}{W_\infty} = \left(\frac{y}{\delta_{\text{тб}}} \right)^{1/7}. \quad (\text{VII-83a})$$

Напомним, что в турбулентном пограничном слое имеется ламинарный подслой, на который распределение скорости (VII-83) распространить нельзя. Допустим, что в ламинарном подслое скорость w_x линейно зависит от координаты y . Для простоты не будем учитывать буферный слой, который существует между ламинарным подслоем и турбулентным слоем, т. е. примем двухслойную схему пограничного слоя.

При сделанных допущениях кривая распределения скорости по толщине пограничного слоя будет иметь излом на внешней границе ламинарного подслоя (рис. VII-10). В правую часть уравнения (VII-84) входят касательные напряжения, которые в случае ламинарного пограничного слоя определялись по формуле

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

В рассматриваемом случае такой способ не подходит, так как неизвестна реальная кривая распределения скорости по толщине ламинарного подслоя, поэтому приходится пользоваться экспериментальными данными. Для пластинки оказывается пригодной следующая формула Блазиуса:

$$\tau_w = 0,022 \rho W_\infty^2 \left(\frac{\nu}{W_\infty \delta_{\text{тб}}} \right)^{1/4}, \quad (\text{VII-85})$$

справедливая для чисел Рейнольдса $Re \leq 10^7$.

Найдем [92] интеграл из (VII-84), подставляя в него функцию распределения скорости (VII-83 а)

$$\int_0^{\delta_{\text{тб}}} (W_\infty - w_x) w_x dy = W_\infty^2 \int_0^{\delta_{\text{тб}}} \left(\frac{y}{\delta_{\text{тб}}} \right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta_{\text{тб}}} \right)^{1/7} \right] dy = \frac{7}{72} W_\infty^2 \delta_{\text{тб}}. \quad (\text{VII-86})$$

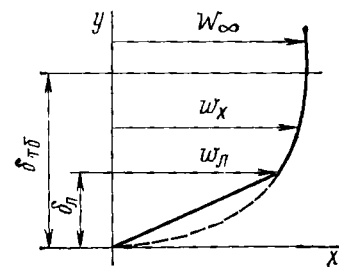


Рис. VII-10. Распределение скорости по толщине двухслойного (упрощенная схема) турбулентного пограничного слоя

Сопоставляя (VII-86) и (VII-17 а), при условии $W_\infty = w_1$, найдем толщину потери импульса δ^{**}

$$\delta^{**}(x) = \frac{7}{72} \delta_{\tau\delta}. \quad (\text{VII-87})$$

Теперь подставим в (VII-84) значение интеграла (VII-86) и заданное касательное напряжение из (VII-85)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{7}{72} W_\infty^2 \delta_{\tau\delta} \right) = 0,022 W_\infty^2 \left(\frac{v}{W_\infty \delta_{\tau\delta}} \right)^{1/4}.$$

Продифференцировав и разделив переменные, получим дифференциальное уравнение

$$\delta_{\tau\delta}^{1/4} d\delta_{\tau\delta} = 0,235 \left(\frac{v}{W_\infty} \right)^{1/4} dx, \quad (\text{VII-88})$$

решив которое, найдем искомую толщину турбулентного пограничного слоя

$$\delta_{\tau\delta} = 0,37 \left(\frac{v}{W_\infty} \right)^{1/5} x^{4/5} + C.$$

Константу C найдем, предположив, что турбулентный слой образовался у передней кромки пластины [на самом деле, в начале пластины образуется ламинарный слой, который переходит в турбулентный на некотором расстоянии от передней кромки (см. рис. VII-8)]. На основании такого предположения получаем при $x = 0$ и $\delta_{\tau\delta} = 0$, а следовательно, и $C = 0$.

В обобщенных координатах последнее уравнение при $C = 0$ имеет вид

$$\frac{\delta_{\tau\delta}}{x} = \frac{0,37}{(\text{Re}_x)^{1/5}}. \quad (\text{VII-89})$$

Теперь выведем формулу для определения локального коэффициента трения c_f . Пусть распределение скорости в ламинарном подслое линейное, тогда можно написать

$$\tau_w = \mu \frac{dw_x}{dy} = \mu \frac{w_x}{y}.$$

Подставим в это выражение значение τ_w из (VII-85). В результате получим

$$w_x = 0,0228 \rho \frac{W_\infty^2}{\mu} \left(\frac{v}{W_\infty \delta_{\tau\delta}} \right)^{1/4} y.$$

На внешней границе ламинарного подслоя при $y = \delta_l$ скорость равна $w_x = w_{x,l}$ (см. рис. VII-11), для этих условий последнее выражение можно представить в следующей форме:

$$\frac{\delta_l}{\delta_{\tau\delta}} = \frac{w_{x,l}}{W_\infty} \frac{1}{0,0228} \left(\frac{v}{W_\infty \delta_{\tau\delta}} \right)^{3/4}.$$

В полученном выражении две неизвестных величины — толщина ламинарного подслоя δ_l и скорость на внешней границе ламинарного подслоя $w_{x,l}$. Для решения требуется еще одно уравнение. Его легко написать на основании (VII-83 а)

$$\frac{\delta_l}{\delta_{\tau\delta}} = \left(\frac{w_{x,l}}{W_\infty} \right)^7.$$

Сопоставляя два последних уравнения, найдем

$$\left(\frac{w_{x,l}}{W_\infty} \right)^6 = \frac{1}{0,0228} \left(\frac{v}{W_\infty \delta_{\tau\delta}} \right)^{3/4};$$

извлекая корень шестой степени из всех членов, получим

$$\frac{w_{x,l}}{W_\infty} = 1,878 \left(\frac{v}{W_\infty \delta_{\tau\delta}} \right)^{1/8}.$$

Подставим в полученное выражение значение $\delta_{\tau\delta}$ из (VII-89). В результате получим уравнение для определения скорости $w_{x,l}$ на внешней границе ламинарного подслоя

$$\begin{aligned} \frac{w_{x,l}}{W_\infty} &= 1,878 \left(\frac{v}{W_\infty \frac{0,37 x v^{1/5}}{W_\infty^{1/5} x^{1/5}}} \right)^{1/8} = \frac{1,878}{(0,37)^{1/8}} \left(\frac{v^{4/5}}{W_\infty^{4/5} x^{4/5}} \right)^{1/8} = \\ &= 2,12 \left(\frac{v}{W_\infty x} \right)^{0,1} = \frac{2,12}{(\text{Re}_x)^{0,1}}. \end{aligned} \quad (\text{VII-90})$$

Используя кривую распределения скорости (VII-83 а) по толщине пограничного слоя и формулу (VII-90), найдем

$$\frac{\delta_l}{\delta_{\tau\delta}} = \left(\frac{w_{x,l}}{W_\infty} \right)^7 = \left[\frac{2,12}{(\text{Re}_x)^{0,1}} \right]^7 = \frac{194}{(\text{Re}_x)^{0,7}}. \quad (\text{VII-91})$$

В ламинарном подслое, как уже отмечалось, принято линейное распределение скорости, поэтому

$$\tau_w = \mu \frac{w_{x,l}}{\delta_l}.$$

Подставим в эту формулу значение $w_{x,l}$ из (VII-90) и δ_l из (VII-91) После сокращения получим

$$\tau_w = \frac{2,12}{194} \mu \frac{W_\infty}{\delta_{\tau\delta}} (\text{Re}_x)^{0,6}.$$

Введем в полученное выражение $\delta_{\tau\delta}$ из (VII-89);

после простых преобразований найдем

$$\tau_w = 0,0296\mu \frac{W_\infty \left(\frac{W_\infty x}{\nu} \right)^{0,8}}{x};$$

разделим обе части полученного выражения на ρW_∞^2 и после преобразований окончательно получим

$$\frac{\tau_w}{\rho W_\infty^2} = \frac{0,0296}{(Re_x)^{0,2}}.$$

Локальный коэффициент трения определим из последнего выражения; с учетом (VII-25) он равен

$$c_f = \frac{0,0592}{(Re_x)^{0,2}}. \quad (VII-92)$$

Выведем формулу для определения среднего коэффициента трения C_f . Сопротивление трения пластины шириной b на длине от 0 до x можно представить в виде

$$U(x) = b \int_0^x \tau_w(x) dx,$$

где $\tau_w(x)$ — локальное касательное напряжение, действующее на пластину на расстоянии x от передней кромки.

Найдем величину $U(x)$ другим способом. Полный поток количества движения в направлении x при продольном обтекании пластины (§ 2, гл. VII) равен сопротивлению трения пластины, смоченной с одной стороны [88]. В соответствии с этим, используя выражения (б) и (в) из § 2, гл. VII для турбулентного пограничного слоя, получим

$$U(x) = b\rho \int_0^{\delta_{\tau 0}} w_x (W_\infty - w_x) dy.$$

Приравнявая два последних выражения

$$U(x) = b \int_0^x \tau_w(x) dx = b\rho \int_0^{\delta_{\tau 0}} w_x (W_\infty - w_x) dy$$

и учитывая соотношение (VII-17 а), получим

$$U(x) = b\rho W_\infty^2 \delta^{**}(x). \quad (VII-93)$$

Формулу для полного сопротивления пластины, смоченной с одной стороны, длиной l и шириной b получим, совмещая (VII-93), (VII-87) и (VII-89)

$$U = 0,037\rho W_\infty^2 bl \left/ \left(\frac{W_\infty l}{\nu} \right)^{1/5} \right. \quad (VII-94)$$

По определению средний коэффициент равен

$$C_f = U \left/ \frac{\rho W_\infty^2}{2} bl \right.$$

Подставив в это выражение значение U из (VII-94), получим

$$C_f = 0,074/(Re_l)^{1/5}. \quad (VII-95)$$

Закон сопротивления трению Прандтля для турбулентного течения (VII-95) в виде кривой 2 представлен на рис. VII-11. Этот закон справедлив в следующем диапазоне чисел Рейнольдса: $5 \cdot 10^5 < Re_l < 10^7$. Формула (VII-95) выведена в предположении, что турбулентный пограничный слой начинается от передней кромки пластины; в таких условиях она дает хорошее совпадение с результатами измерений в диапазоне чисел Рейнольдса $5 \cdot 10^5 < Re_l < 10^7$. При $Re_l \leq 5 \cdot 10^5$ течение у пластины ламинарное и следует пользоваться формулой (VII-28). При $Re_l \geq 10^7$ результаты, полученные по формуле (VII-95), начинают расходиться с измеренными.

В формулу (VII-95) можно внести поправку, которая будет учитывать тот факт, что в передней части пластины имеется ламинарный пограничный слой, который на длине $x_{кр}$ от передней кромки (см. рис. VII-8) переходит в турбулентный. Поправку определяют следующим образом: из полного сопротивления пластины вычитают сопротивление турбулентного слоя на длине $x_{кр}$ (VII-95) и вместо него прибавляют сопротивление ламинарного слоя (VII-28) на той же длине. Так как турбулентное сопротивление больше ламинарного, то коэффициент сопротивления C_f для пластины, на которой существуют ламинарный и турбулентный слои, будет меньше, чем подсчитанный по формуле (VII-95).

Опуская вывод* поправки, приведем окончательный результат

$$C_f = \frac{0,074}{(Re_l)^{1/5}} - \frac{A^*}{Re_l}, \quad (VII-96)$$

где A^* — постоянная, зависящая от величины критического числа Рейнольдса; она имеет следующие значения [88]:

$Re_{x, \text{кр}}$	$3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6	$3 \cdot 10^6$
A^*	1050	1700	3300	8700.

При выводе формулы для коэффициента сопротивления (VII-95) использовался закон 1/7 распределения скорости по толщине пограничного слоя (VII-83 а).

Приведем формулы для определения локальных c_f и средних C_f коэффициентов трения, при выводе которых использовали другие предпосылки.

* Вывод см. в [88].

При выводе формул Прандтля—Шлихтинга использовался логарифмический закон распределения скоростей (VII-82); эти формулы имеют вид

$$c_f = (2 \lg Re_x - 0,65)^{-2,3}; \quad (VII-97)$$

$$C_f = \frac{0,455}{(\lg Re_l)^{2,58}}. \quad (VII-98)$$

Закон сопротивления (VII-98) для турбулентного течения в виде кривой 3 представлен на рис. VII-11. Этот закон применяется для следующего диапазона чисел Рейнольдса $10^7 \leq Re_l \leq 10^9$.

С учетом наличия в передней части пластины ламинарного пограничного слоя формулу (VII-98) представим в виде

$$C_f = \frac{0,455}{(\lg Re_l)^{2,58}} - \frac{A^*}{Re_l}. \quad (VII-98a)$$

Здесь постоянная A^* определяется так же, как в формуле (VII-96). Закон сопротивления (VII-98) для перехода от ламинарного течения к турбулентному представлен на рис. VII-11 в виде кривой 3а. Эта кривая построена для $A = 1700$.

Используя уточненный логарифмический закон распределения скоростей в пограничном слое на пластине, получили следующие формулы [88]:

$$c_f = 0,370 (\lg Re_x)^{-2,584}; \quad (VII-99)$$

$$C_f = 0,427 (\lg Re_l - 0,407)^{-2,64}. \quad (VII-100)$$

Закон сопротивления (VII-100) для турбулентного течения в виде кривой 4 представлен на рис. VII-11.

На рис. VII-11, кроме кривых, представляющих законы сопротивления трения, для сравнения приведены (в виде точек) экспериментальные данные; как видно из рисунка, совпадение расчетных значений C_f с экспериментальными вполне удовлетворительное.

Для определения коэффициентов теплоотдачи локального α_x или среднего $\bar{\alpha}$ при продольном обтекании пластины, когда на ней турбулентный пограничный слой начинается от ее передней кромки, можно поступить следующим образом. Вычислить локальный c_f или средний коэффициент трения C_f по одной из формул (VII-92, VII-95, VII-97, VII-98, VII-99 и VII-100) в зависимости от условий задачи. Полученное значение коэффициента трения подставляют в формулы (VII-74)

$$St = \frac{1}{2} c_f, \quad \bar{St} = \frac{1}{2} C_f$$

или

$$\frac{\alpha_x}{c_p \rho W_\infty} = \frac{1}{2} c_f, \quad \frac{\bar{\alpha}}{c_p \rho W_\infty} = \frac{1}{2} C_f.$$

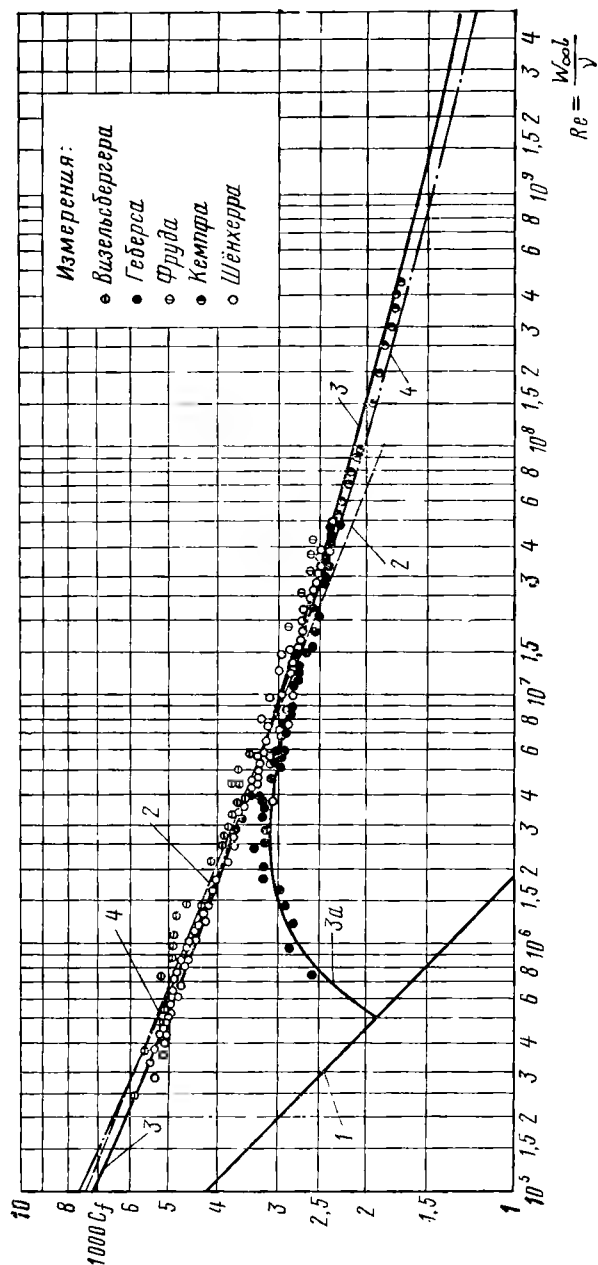


Рис. VII-11. Зависимость коэффициента трения C_f от числа $Re = \frac{W_\infty l}{\nu}$ при продольном обтекании пластины; сравнение теории (линии на рисунке) и эксперимента (точки на рисунке):
1 — закон трения для ламинарного течения, формула (VII-28); 2 — закон трения для турбулентного течения, формула (VII-95);
3 — закон трения для турбулентного течения, формула (VII-98); 3а — закон трения для перехода от ламинарного течения к турбулентному; 4 — закон трения для турбулентного течения, формула (VII-100) [88]

§ 9. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ПОМОЩЬЮ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим сущность метода определения коэффициента трения C_f при течении несжимаемой жидкости вдоль пластины [15].

Метод сводится к приближенному решению следующей системы дифференциальных уравнений, граничных условий и некоторых дополнительных условий из полуэмпирической теории турбулентности (§ 7, гл. VII):

уравнения движения и сплошности

$$\rho \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0;$$

предполагается, что напряжения трения τ можно представить в виде полинома от y/δ

$$\frac{\tau}{\tau_w} = A_0 + A_1 + A_2 \left(\frac{y}{\delta} \right) + A_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \dots;$$

граничные условия

при $y = 0$ $w_x = 0$, $w_y = 0$, $\tau = \tau_w$, $\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0$;

при $y = \delta$ $\tau = 0$;

дополнительные условия

при $y \geq \delta_n$ $\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2$;

при $0 \leq y \leq \delta_n$ $\tau_w = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y}$.

На границе ламинарного подслоя δ_n зависимость скорости w_x и напряжения τ от координаты y не терпят разрыва

$$(w_x)_{y=\delta_n-0} = (w_x)_{y=\delta_n+0}, \quad (\tau)_{y=\delta_n-0} = (\tau)_{y=\delta_n+0},$$

а производные скорости при переходе через границу ламинарного подслоя терпят разрыв

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=\delta_n-0} = \kappa_1 \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=\delta_n+0},$$

где κ и κ_1 — универсальные постоянные, они равны

$$\kappa \approx 0,4, \quad \frac{\kappa_1}{\kappa} \approx 11.$$

Ход решения указанной системы очень громоздок и здесь обсуждать его не будет.

В результате решения была получена следующая формула:

$$C_f = 0,03 \left(\frac{W_\infty l}{\nu} \right)^{-0,139} \quad (\text{VII-101})$$

Она подтверждается экспериментально.

Для определения коэффициента теплоотдачи α при соответствующих условиях следует подставить полученное значение коэффициентов трения C_f из формулы (VII-101) в (VII-74).

§ 10. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ТЕПЛОТДАЧА В ТРУБАХ

Изучение процессов течения жидкости и теплоотдачи в трубах представляет большой практический интерес, так как трубы являются элементами различных теплообменных аппаратов. Наибольшие трудности возникают при исследовании течения и теплоотдачи на начальном участке трубы. Участок течения в трубе, на протяжении которого поле основной переменной величины (скорости или температуры) зависит от условий на входе и на котором происходит нарастание пограничного слоя до заполнения поперечного сечения трубы, называют **начальным участком**. В зависимости от природы процесса переноса различают **гидродинамический начальный участок** и **тепловой начальный участок** [74]. В начальном участке может быть ламинарное и турбулентное течение жидкости.

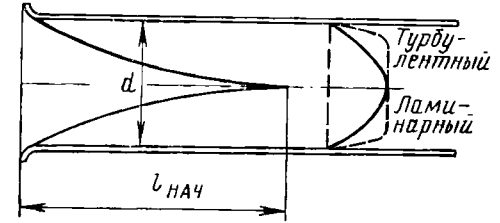


Рис. VII-12. Течение жидкости в трубе

При ламинарном и турбулентном течении в начальном участке во входном сечении трубы ($x = 0$) профиль скорости плоский (имеет прямоугольную форму).

При ламинарном течении в начальном участке плоский профиль под действием сил трения вытягивается и на некотором расстоянии от входного сечения принимает и в дальнейшем сохраняет форму параболы (рис. VII-12).

При турбулентном течении в начальном участке плоский профиль под воздействием сил трения трансформируется; в пристенной области он имеет параболическую форму, а в ядре потока — плоскую; в некоторой переходной области между пристенной и ядром потока происходит плавное смыкание профилей скорости.

Длину начального участка $l_{нач}$ трубы диаметром d при ламинарном течении можно определить по следующей формуле:

$$l_{нач} = 0,03d \text{ Re}. \quad (\text{VII-102})$$

Из (VII-102) следует, что при $\text{Re} = 5000$ длина $l_{нач} = 150 d$.

Длина начального участка $l_{\text{нач}}$ трубы диаметром d при турбулентном течении определена экспериментально и равна [88]

$$l_{\text{нач}} \approx 25d \div 40d. \quad (\text{VII-103})$$

Теплоотдача на начальном участке трубы трудно поддается теоретическому исследованию, поэтому в настоящей главе будет рассмотрен теплообмен на такой длине от входного сечения ($x = 0$), которая превышает длину начального участка там, где течение становится стабилизированным.

Течение в трубе на таком удалении от входа, что поле скорости практически не зависит от характера распределения скорости на входе, называется **стабилизированным течением**. В случае постоянных физических свойств жидкости при стабилизированном течении распределение скорости по сечению не изменяется по длине трубы.

Гидродинамическое сопротивление

Введем понятие коэффициента сопротивления. При движении жидкости по трубе в результате диссипации энергии происходит уменьшение давления. Выделим участок трубы радиуса r длиной l в области стабилизированного течения (рис. VII-13).

Цилиндрический объем жидкости между сечениями 1-1 и 2-2 находится в равновесии, так как силы инерции отсутствуют. На него действуют силы давления и трения, поэтому

$$(P_1 - P_2) \pi r^2 = \tau_w 2\pi r l,$$

откуда

$$\tau_w = \frac{P_1 - P_2}{l} \cdot \frac{r}{2}. \quad (\text{VII-104})$$

Полученная формула справедлива для ламинарного и турбулентного течения в трубе. По ней определяют касательное напряжение, действующее на стенку трубы, по заданному или измеренному перепаду давлений.

Отметим здесь относительную простоту экспериментального определения касательных напряжений на стенке трубы τ_w , возникающих при турбулентном течении жидкости. Определить экспериментально касательные напряжения при внешнем обтекании тела, даже простой формы, например пластины, значительно труднее. Поэтому закономерности турбулентного течения часто изучают на примере движения жидкости в трубе.

Перепад давления обычно связывают со средней скоростью следующим образом:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{\xi}{d} \cdot \frac{\rho}{2} W_{\text{ср}}^2, \quad (\text{VII-105})$$

где ξ — безразмерный коэффициент сопротивления;
 $W_{\text{ср}}$ — скорость, средняя по сечению трубы;
 d — диаметр трубы.

Сопоставляя уравнения (VII-104) и (VII-105), получим

$$\tau_w = \frac{\xi}{8} \rho W_{\text{ср}}^2$$

или

$$\xi = \frac{8\tau_w}{\rho W_{\text{ср}}^2}. \quad (\text{VII-106})$$

Сравним коэффициент сопротивления ξ с ранее введенным понятием среднего коэффициента трения C_f в виде

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho W_{\text{ср}}^2}.$$

Сопоставляя это выражение с (VII-106), найдем

$$C_f = \frac{\xi}{4}. \quad (\text{VII-107})$$

Для ламинарного течения коэффициент сопротивления находят, решая уравнение Навье—Стокса. В результате решения установлено, что распределение скорости в трубе представляет собой параболу, а коэффициент ξ оказывается равным

$$\xi = \frac{64}{\text{Re}_d}. \quad (\text{VII-108})$$

На основании совместного решения системы уравнений Навье—Стокса, сплошности и энергии, для ламинарного течения несжимаемой жидкости в трубе получена формула

$$\text{Nu}_d = 3,65. \quad (\text{VII-109})$$

Для турбулентного течения пока не удалось аналитически найти зависимость коэффициента сопротивления ξ от параметров потока, как это было сделано в случае ламинарного течения (VII-108).

Экспериментально найдена формула для определения коэффициента сопротивления при турбулентном течении жидкости в трубах при

$$\text{Re}_d = \frac{W_{\text{ср}} d}{\nu} = (5 \div 100) \cdot 10^3,$$

$$\xi = 0,316 (\text{Re}_d)^{-\frac{1}{4}}. \quad (\text{VII-110})$$

Формула (VII-110) составляет содержание закона сопротивления Блазиуса. Позднее были проведены опыты по определению коэффициента сопротивления ξ при больших числах Рейнольдса $\text{Re} > 10^5$, которые показали, что формула (VII-110) дает в этих условиях заниженные результаты.

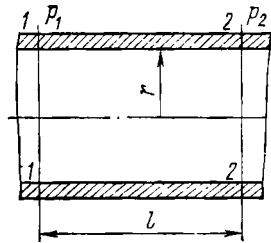


Рис. VII-13. К выводу формулы (VII-104)

Закон распределения скорости по сечению трубы найден экспериментально, его можно представить в форме

$$\frac{w}{W} = \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{VII-111})$$

где

$$\begin{aligned} n &= 6 && \text{при } Re = 40 \cdot 10^3; \\ n &= 7 && \text{при } Re = 110 \cdot 10^3; \\ n &= 10 && \text{при } Re = 3240 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Приведенные данные свидетельствуют о том, что показатель степени в уравнении (VII-111) мало зависит от числа Рейнольдса.

Прандтль показал, что между законом сопротивления Блазиуса (VII-110) и распределением скоростей (VII-111) существует внутренняя связь. Этот очень важный факт используется при теоретическом изучении турбулентного течения. Кроме того, упомянутая связь позволяет использовать экспериментальные данные о сопротивлении движению турбулентного потока в трубе, при определении сопротивления продольно обтекаемой пластины с турбулентным пограничным слоем. Используя закон сопротивления Блазиуса (VII-110), можно получить закон степени 1/7 для распределения скоростей [88]

$$\frac{w_x}{v_*} = 8,74 \left(\frac{yv_*}{v} \right)^{1/7}. \quad (\text{VII-112})$$

Следовательно, закон степени 1/7 для распределения скорости, с одной стороны, был получен экспериментально (VII-111) для определенного значения числа Рейнольдса ($Re = 110 \cdot 10^3$), с другой стороны — закон степени 1/7 получен путем некоторых преобразований (теоретически) из закона Блазиуса. Это обстоятельство подтверждает существование внутренней связи между законом степени 1/7 для распределения скоростей и законом сопротивления Блазиуса. Перепишем (VII-112) с учетом обозначений к формуле (VII-82)

$$\varphi = 8,74 \eta^{1/7}. \quad (\text{VII-113})$$

Ранее был получен степенной закон для распределения скорости при турбулентном течении вдоль пластины (VII-83).

Установлено, что закон сопротивления Блазиуса (VII-110) можно распространить на течение с большими числами Рейнольдса ($Re > 10^5$), если заменить в нем показатель степени 1/4 на 1/5 или 1/6. Соответственно в формуле (VII-113) показатели 1/7 заменяют на 1/8 или 1/9 и т. д. [88]; величина $C(n)$ изменяется следующим образом:

$$C(n) = \begin{matrix} n=7 & 8 & 9 & 10 \\ 8,74 & 9,71 & 10,6 & 11,5 \end{matrix}$$

Итак, при увеличении числа Рейнольдса показатели степени как в законе сопротивления (VII-110), так и в законе распределения скорости (VII-113) уменьшаются. Значит можно предположить, что в предельном случае при очень больших числах Рейнольдса существуют асимптотические законы, которые содержат логарифмы, как предель-

ное значение очень малой степени. Опыт подтвердил существование таких законов. Асимптотические законы имеют преимущество перед степенными, так как их можно экстраполировать на произвольно большие числа Рейнольдса, для которых нет экспериментальных данных.

Ранее (§ 7, гл. VII) с помощью полуэмпирической теории турбулентности был получен асимптотический логарифмический закон распределения скоростей (VII-82) в форме

$$\varphi(\eta) = A_1 \ln \eta + D_1.$$

Сопоставляя кривую универсального закона распределения скорости (VII-82) с экспериментальной кривой распределения скорости в гладкой трубе, можно показать, что при

$$A_1 = \frac{1}{\kappa} = 2,5 \quad \text{и} \quad D_1 = -\frac{1}{\kappa} \ln \beta = 5,5,$$

откуда $\kappa = 0,4$, а $\beta = 0,111$, обе кривые удовлетворительно совпадают.

Следовательно, универсальный закон распределения скоростей в гладких трубах с учетом экспериментально найденных постоянных в (VII-82) можно представить в форме

$$\varphi(\eta) = 2,5 \ln \eta + 5,5. \quad (\text{VII-114})$$

В полулогарифмических координатах зависимость (VII-114) представляет собой прямую линию (рис. VII-14).

При выводе (VII-83) учитывались только турбулентные касательные напряжения и совсем не учитывались ламинарные. Однако у стенки трубы, так же как и у стенки пластины, существует ламинарный подслой, в котором возникают только ламинарные касательные напряжения, поэтому здесь закон (VII-114) не является справедливым. Непосредственные измерения показали, что в области ламинарного подслоя справедливо соотношение

$$\varphi = \eta, \quad (\text{VII-115})$$

которое в полулогарифмических координатах представляет собой кривую, изображенную в левой части рис. VII-14.

Между ламинарным подслоем и турбулентной зоной потока в трубе, так же как и при обтекании пластины, существует буферный слой. В полулогарифмических координатах распределению скорости в этом слое соответствует кривая 2 (рис. VII-14).

Каждая из трех последних зависимостей оказывается справедливой для соответствующего слоя жидкости; границы этих слоев установлены:

для ламинарного подслоя (VII-115) от стенки до $\frac{yv_*}{v} = 5$;

для буферного слоя от $\frac{yv_*}{v} = 5$ до $\frac{yv_*}{v} = 30$;

для турбулентной зоны от $\frac{yv_*}{v} = 30$ вплоть до максимально возможного значения $\frac{yv_*}{v}$ в заданных условиях.

Для очень больших чисел Re на основании универсального логарифмического закона распределения скорости получен универсальный асимптотический закон сопротивления в следующей форме:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2,0 \lg \left(\frac{W_{cp} d}{\nu} \sqrt{\xi} \right) - 0,8. \quad (VII-116)$$

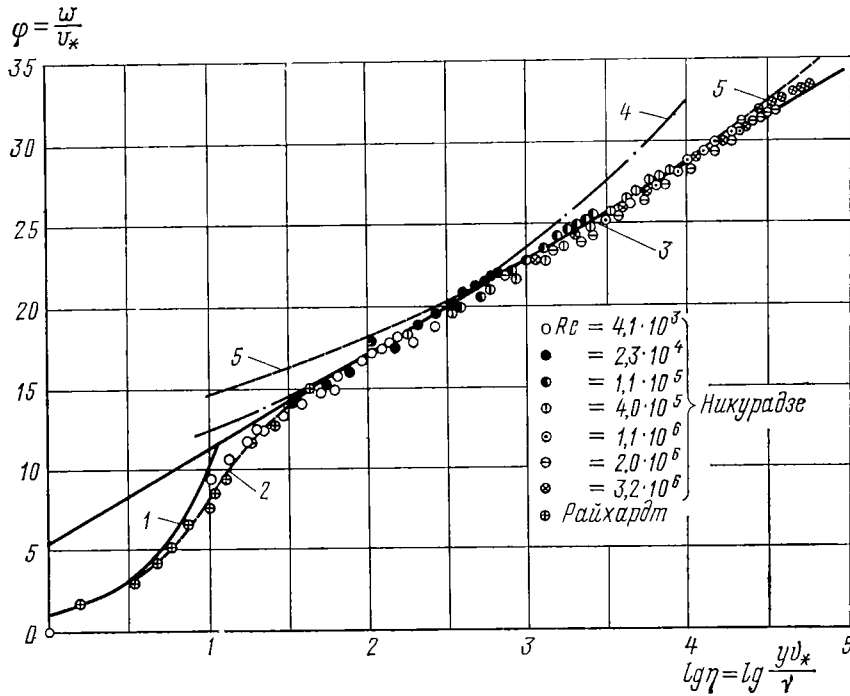


Рис. VII-14. Универсальный закон распределения скорости жидкости по сечению трубы [88]:

1 — соответствует (VII-115), 2 — переход от ламинарной формы течения к турбулентной, 3 — соответствует (VII-114), 4 — соответствует (VII-113), 5 — соответствует $\varphi = 11,5 \eta^{1/10}$.

Выражение (VII-116) составляет содержание универсального закона сопротивления Прандтля для гладких труб. Закон подтвержден экспериментально до чисел Re , равных $3,4 \cdot 10^6$. Закон (VII-116) асимптотический, и поэтому может быть экстраполирован до произвольно больших чисел Re .

Теплоотдача

Выясним, можно ли применять гидродинамическую теорию теплообмена для исследования теплоотдачи при турбулентном течении в трубе.

Уравнения турбулентного пограничного слоя (VII-62) и (VII-71) на пластине при продольном обтекании с умеренной скоростью можно представить в виде:

уравнение движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon_\sigma) \frac{\partial w_x}{\partial y} \right];$$

уравнение энергии

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + \varepsilon_q) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right].$$

Сравнивая эти уравнения, устанавливаем, что при условии $P_r = \frac{\nu}{a} = 1$ и $P_{r_0} = \frac{A_\sigma}{A_q} = 1$ распределения скорости и температуры по сечению трубы подобны. Используя условие подобия профилей скорости и температуры, можно найти зависимость между коэффициентом теплоотдачи и трения в форме

$$St = \frac{1}{2} C_f.$$

Теплоотдачу в трубе при турбулентном течении жидкости можно исследовать с помощью уравнений для турбулентного пограничного слоя. При стабилизированном течении толщина пограничного слоя равна радиусу трубы, а скорость и температура на внешней границе пограничного слоя равны скорости и температуре на оси трубы.

Уравнения пограничного слоя в цилиндрических координатах при расположении оси x вдоль оси трубы, а оси y вдоль радиуса r , с учетом, что в трубах $\frac{dp}{dx} \neq 0$, можно представить в виде:

уравнение движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_r \frac{\partial w_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\nu + \varepsilon_\sigma) r \frac{\partial w_x}{\partial r} \right];$$

уравнение энергии

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(a + \varepsilon_q) r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right].$$

Сравнивая эти уравнения, устанавливаем, что при условии $P_r = \frac{\nu}{a} = 1$ и $P_{r_0} = \frac{A_\sigma}{A_q} = 1$, профили скорости и профили температуры в трубе не подобны из-за влияния дополнительного члена в уравнении движения $-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$.

В результате возможность применения гидродинамической теории теплообмена в рассматриваемом случае оказывается под вопросом. Однако исследования показали, что в потоках высокой степени турбулентности различие профилей скорости и температуры невелико [22] и их можно считать подобными и, следовательно, применять гидродинамическую теорию теплообмена.

намическую теорию теплообмена. Для случая течения в трубах остаются справедливыми соотношения (VII-58), например,

$$St = \frac{1}{2} C_f,$$

а с учетом (VII-107) получим

$$St = \frac{\xi}{8}. \quad (VII-117)$$

Формулу для определения теплоотдачи в трубе для $Re_d \leq 1 \cdot 10^5$ получим, сопоставляя (VII-107) и (VII-110), в виде

$$St = \frac{\xi}{8} = \frac{0,3164}{8(Re_d)^{1/4}} = \frac{0,0396}{(Re_d)^{1/4}} \quad (VII-118)$$

или с учетом (VII-47) в следующей форме:

$$Nu_d = 0,0396(Re_d)^{0,75} Pr. \quad (VII-119)$$

В заключение отметим, что в настоящей главе рассмотрены наиболее простые случаи теплоотдачи при обтекании пластины и при течениях в трубе без учета:

- а) сжимаемости ($\rho = \text{const}$);
 - б) зависимости физических констант жидкости от температуры;
 - в) влияния числа Прандтля ($Pr = 1$, $Pr_{\text{тб}} = 1$);
 - г) влияния формы тела и качества (шероховатость) обтекаемой поверхности.
- Влияние этих факторов на теплоотдачу будет рассмотрено в последующих главах.

ТЕПЛОТДАЧА В ПЕРЕДНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ

В предыдущей главе подробно анализировался процесс теплоотдачи пластины, параллельной потоку жидкости. Не меньший интерес представляет процесс теплоотдачи пластины, расположенной нормально к потоку жидкости (рис. VIII-1). В инженерной практике встречаются случаи взаимодействия как ламинарных, так и турбулентных потоков с различными преградами.

При взаимодействии потока с преградой, расположенной нормально к направлению его скорости, теплоотдача осложняется действием градиента давления ($\partial p / \partial x \neq 0$) и турбулентных пульсаций, если на-

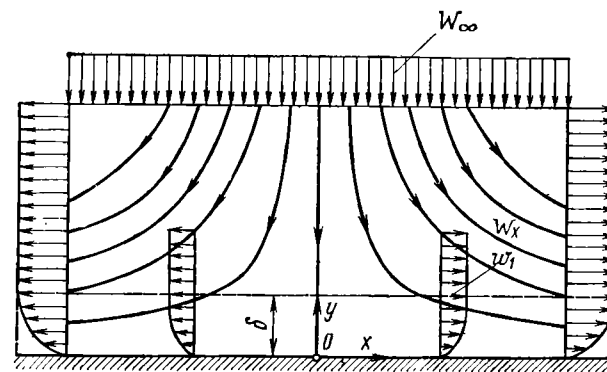


Рис. VIII-1. Схема плоскопараллельного течения в окрестности критической точки

текающий поток турбулентный. Оба фактора приводят к интенсификации теплообмена. Исследование процесса теплоотдачи в передней критической точке O (рис. VIII-1) при взаимодействии ламинарного потока с преградой представляет не только теоретический, но и практический интерес. С таким процессом приходится встречаться при исследовании теплоотдачи головным частям летательных аппаратов, передним кромкам крыльев, аэродинамических рулей и т. п.

Исследование процесса теплоотдачи в окрестности критической точки при взаимодействии турбулентных потоков с преградами представляет большой теоретический и практический интерес. С таким процессом приходится встречаться при исследовании теплообмена между струями и преградами. Если струя жидкости истекает в пространство, также заполненное жидкостью, то в результате взаимодей-

ствия с окружающей средой струйный поток становится турбулентным.

Термическая обработка листового металла или стекла иногда производится струями жидкости, нормальными к обрабатываемым поверхностям. Киоленты и ткани сушат струями горячего воздуха. Струи газа очень высокой температуры используют для резки различных материалов, термического бурения твердых горных пород, бетона, мерзлого грунта и т. п. В перечисленных случаях стремятся интенсифицировать теплоотдачу.

С другой стороны в ряде случаев приходится разрабатывать меры тепловой защиты от воздействия струй газа высокой температуры. Например, при вертикальном взлете самолетов необходимо защищать покрытие аэродромов или палуб авианосцев от разрушительного воздействия струй газов, выбрасываемых из реактивных двигателей; необходимо также защищать стартовые столы ракет.

В настоящей главе будет рассмотрен процесс теплоотдачи при взаимодействии несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) с преградой.

§ 1. ТЕПЛОТДАЧА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКОГО ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА С ПЛАСТИНОЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НОРМАЛЬНО К ЕГО НАПРАВЛЕНИЮ

Рассмотрим процесс теплообмена в окрестности критической точки O , при взаимодействии ламинарного потока жидкости с пластиной, расположенной нормально к направлению его скорости (рис. VIII-1). В этих условиях коэффициент теплоотдачи можно определить теоретически путем решения системы уравнений пограничного слоя с соответствующими граничными условиями.

Допустим, что в окрестности критической точки справедлива следующая система уравнений пограничного слоя—движения, сплошности и энергии

$$\left. \begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0; \\ w_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-1a, б, в})$$

где θ — избыточная температура по отношению к какой-либо температуре, характерной для рассматриваемого процесса.

При натекании потока жидкости на преграду по мере приближения к поверхности уменьшается его кинетическая энергия, а давление возрастает. Кинетическая энергия жидкости в точке O (см. рис. VIII-1) равна нулю, так как скорость в этой точке равна нулю, давление в критической точке ($x = 0$) наибольшее по сравнению с давлением в любой другой точке ($x > 0$) на пластине.

В точке O (рис. VIII-1) поток разворачивается и начинает двигаться вдоль поверхности в направлении оси x , при этом происходит уменьшение давления и увеличение скорости W_x . Значит в окрестности передней критической точки существует градиент давления, а следовательно, и скорости, поэтому течение в этой области называют градиентным ($\frac{dp}{dx} \neq 0$).

Предполагается, что в окрестности критической точки режим течения жидкости ламинарный, так как в этой области числа Рейнольдса $Re = \frac{W_{xx}}{\nu}$ малы, потому что мала скорость W_x и координата x ; кроме того, здесь действует отрицательный градиент давления, который также стимулирует ламинарный режим течения.

Как показали исследования, градиент скорости оказывает большое влияние на теплоотдачу в сторону ее увеличения, и поэтому это явление будет подробно рассмотрено.

В окрестности передней критической точки O (см. рис. VIII-1) за пределами пограничного слоя скорость W_x возрастает вдоль оси x по линейному закону

$$W_x = u_1 x, \quad (\text{VIII-2})$$

где u_1 — постоянная величина, которую можно рассматривать как градиент скорости.

Для скорости на внешней границе пограничного слоя w_1 выражение (VIII-2) примет вид

$$w_1 = u_1 x. \quad (\text{VIII-3})$$

За пределами пограничного слоя течение считают потенциальным (гл. VII) (нет вязкости), и поэтому для его описания можно применять уравнение Эйлера (VII-11).

Учитывая (VIII-2), это уравнение можно представить в виде

$$W_x \frac{\partial W_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u_1^2 x.$$

С учетом последнего выражения уравнение движения (VIII-1a) можно представить в виде

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = u_1^2 x + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (\text{VIII-4})$$

Закон распределения скоростей w_x и w_y можно представить в виде

$$w_x = x f'(y), \quad w_y = -f(y), \quad (\text{VIII-5})$$

где $f(y)$ — функция координаты y ;

$f'(y)$ — первая производная функции $f(y)$ по y .

Подстановка зависимостей (VIII-5) в уравнение сплошности (VIII-1б) обращает последнее в тождество, значит (VIII-5) есть решение (VIII-1б). Поэтому для определения функции $f(y)$ можно использовать только одно уравнение (VIII-4).

Выразим скорости w_x и w_y через u_1 . Для этого введем новые переменные

$$\eta = \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \cdot y; \quad (\text{VIII-6})$$

$$f(\eta) = \sqrt{u_1 \nu} \varphi(\eta). \quad (\text{VIII-7})$$

Распределение скорости (VIII-5) в новых переменных имеет вид

$$w_x = u_1 x \varphi'(\eta), \quad w_y = -\sqrt{u_1 \nu} \varphi(\eta), \quad (\text{VIII-8})$$

где $\varphi'(\eta)$ — первая производная функции $\varphi(\eta)$ по η .

Теперь подставим значение скоростей w_x и w_y в уравнение (VIII-4), после соответствующих преобразований получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\varphi''' + \varphi \varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0. \quad (\text{VIII-9})$$

Для рассматриваемого случая граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = 0; \quad & \varphi = 0; \quad \varphi' = 0; \\ \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad & \varphi' = 1. \end{aligned} \quad (\text{VIII-10a, б})$$

Поясним граничное условие (VIII-10 б). Вначале выясним смысл φ' . Для этого разделим w_x (VIII-8) на W_x (VIII-2). В результате получим

$$\frac{w_x}{W_x} = \varphi'(\eta). \quad (\text{VIII-11})$$

Результаты численного решения уравнения (VIII-9) [88] с граничными условиями (VIII-10) приведены на рис. VIII-2. Из решения следует, что уже при $\eta = 2,4$ отношение скоростей $\varphi' = \frac{w_x}{W_x} = 0,99$, поэтому значение координаты y (VIII-6), при котором $\eta = 2,4$, принимают за толщину пограничного слоя δ

$$\delta = \eta \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} = 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{u_1}}. \quad (\text{VIII-12})$$

В соответствии с граничным условием (VIII-10 б) толщина пограничного слоя должна определяться как координата y , подсчитанная при $\eta = \infty$, которая также будет равна бесконечности (VIII-12).

Рассматриваемый случай весьма убедительно показывает, что выбор той или иной конечной толщины пограничного слоя δ зависит от

того, какая требуется точность при определении скорости на внешней границе пограничного слоя.

Как уже отмечалось в гл. VII, толщину пограничного слоя выбирают из условия, чтобы скорость на его внешней границе w_1 была равна $w_1 = 0,99 W_x$.

Перейдем к решению уравнения энергии (VIII-1 в). Пусть происходит нагревание пластины потоком газа, распределение температуры по толщине теплового пограничного слоя при этом имеет вид

$$\vartheta = \vartheta_\infty F(\eta), \quad (\text{VIII-13})$$

где $\vartheta = T - T_w$ — избыточная температура, переменная по толщине теплового пограничного слоя;

$\vartheta_\infty = T_\infty - T_w$ — избыточная температура набегающего (невозмущенного) потока;

T — температура, переменная по толщине пограничного слоя;

T_w — температура стенки.

Подставим в уравнение энергии (VIII-1 в) значения скоростей из (VIII-8) и температуры из (VIII-13) и после соответствующих преобразований получим следующее дифференциальное уравнение:

$$F'' + \text{Pr} \varphi F' = 0. \quad (\text{VIII-14})$$

Граничные условия для рассматриваемого случая имеют вид:

$$\text{при } \eta = 0 \quad F = 0$$

$$\text{при } \eta = \infty \quad F = 1.$$

Решение этого уравнения можно представить в форме [108]

$$F(\eta) = a(\text{Pr}) \int_0^\eta \left[\exp \left(-\text{Pr} \int_0^\eta \varphi d\eta \right) \right] d\eta, \quad (\text{VIII-15})$$

где

$$\frac{1}{a(\text{Pr})} = \int_0^\infty \left[\exp \left(-\text{Pr} \int_0^\eta \varphi d\eta \right) \right] d\eta. \quad (\text{VIII-16})$$

Для определения величины $a(\text{Pr})$ рекомендуется следующая приближенная зависимость:

$$a(\text{Pr}) = 0,570 \text{Pr}^{0,4}. \quad (\text{VIII-17})$$

Найдем формулы для определения чисел Нуссельта и Стантона. Для этого проинтегрируем (VIII-15, VIII-16) с учетом (VIII-17) и произведем (известные из гл. VII) преобразования

$$\text{Nu} = 0,570 \text{Pr}^{0,4} \left(\frac{u_1 x^2}{\nu} \right)^{0,5}, \quad (\text{VIII-18})$$

а с учетом (VIII-2)

$$\text{Nu} = 0,570 \text{Pr}^{0,4} \text{Re}^{0,5} \quad (\text{VIII-19})$$

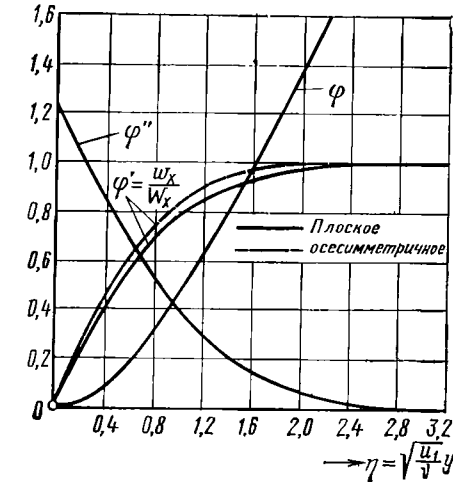


Рис. VIII-2. Результаты решения уравнения (VIII-9) [88]

или

$$St = 0,570 Pr^{-0,6} Re^{-0,5}, \quad (VIII-20)$$

где $Re = \frac{W_{\infty} x}{\nu}$ — критерий Рейнольдса.

Формулы (VIII-19) и (VIII-20) можно представить в другой форме, сохранив в них величину градиента скорости u_1 , т. е.

$$Nu = 0,570 Pr^{0,4} \left(\frac{u_1 x}{W_{\infty}} \right)^{0,5} Re_{\infty}^{-0,5} \quad (VIII-21)$$

или

$$St = 0,570 Pr^{-0,6} \left(\frac{u_1 x}{W_{\infty}} \right)^{-0,5} Re_{\infty}^{-0,5}, \quad (VIII-22)$$

где

$$Re_{\infty} = \frac{W_{\infty} x}{\nu}; \quad (VIII-23)$$

W_{∞} — скорость невозмущенного потока, натекающего на преграду.

Итак, в результате решения системы дифференциальных уравнений движения, неразрывности и энергии (VIII-1 а, б, в) с соответствующими граничными условиями получена расчетная зависимость (VIII-21 и VIII-22) для определения коэффициента теплоотдачи при натекании ламинарного плоского потока на пластину, расположенную нормально к его направлению.

§ 2. ТЕПЛОТДАЧА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО, ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА С ПЛАСТИНОЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НОРМАЛЬНО К ЕГО НАПРАВЛЕНИЮ

При натекании осесимметричного потока на плоскость, нормальную к его направлению, жидкость растекается от передней критической точки во все стороны по радиусам. Если расположить оси x вдоль радиуса, а ось y по оси симметрии струи, то уравнения движения (VIII-1а) и энергии (VIII-1в), написанные для плоского потока, сохраняют свою форму и для осесимметричного потока.

Уравнение сплошности для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{\partial(rw_x)}{\partial x} + r \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (VIII-24)$$

где r — расстояние по радиусу от передней критической до заданной точки.

Как видно, уравнение (VIII-24) отличается от уравнения неразрывности для плоскопараллельного потока (VIII-16).

Физическая обстановка при натекании осесимметричного потока на преграду по сравнению с обстановкой при натекании плоского по-

тока, при прочих равных условиях, будет отличаться тем, что в первом случае градиент давления в окрестности передней критической точки будет больше, так как в первом случае удельный объем жидкости, текущей вдоль радиуса, возрастает быстрее, чем во втором. Больший градиент для осесимметричного потока вызовет и больший градиент скорости. Интенсивность теплоотдачи прямо пропорциональна градиенту скорости u_1 (VIII-21), поэтому можно ожидать, что коэффициент теплоотдачи при натекании осесимметричного потока на преграду будет больше, чем при натекании плоскопараллельного.

Ход решения уравнений движения и сплошности для осесимметричного потока такой же, как и для плоского. На рис. VIII-2 приведено изменение безразмерной скорости φ' по толщине пограничного слоя.

Решение системы дифференциальных уравнений движения сплошности и энергии, описывающих теплоотдачу в окрестности передней критической точки осесимметричного потока, натекающего на нормальную к его направлению плоскость, приводит к следующей расчетной зависимости [101]:

$$Nu = 0,763 Pr^{0,4} Re^{0,5} \quad (VIII-25)$$

или

$$St = 0,763 Pr^{-0,6} Re^{-0,5}. \quad (VIII-26)$$

Сравнивая формулы (VIII-19) и (VIII-25), устанавливаем, что интенсивность теплоотдачи в окрестности передней критической точки осесимметричного потока больше, чем плоскопараллельного, т. е. ранее высказанное предположение, сделанное на основе качественного анализа процессов, подтвердилось.

При обтекании цилиндров и сфер градиент скорости зависит от соответствующего диаметра, поэтому формулы (VIII-25) и (VIII-26) можно представить в более удобной форме; по аналогии с (VIII-21) и (VIII-22) получим

$$Nu = 0,763 Pr^{0,4} \left(\frac{u_1 D}{W_{\infty}} \right)^{0,5} Re_{\infty}^{0,5} \quad (VIII-27)$$

или

$$St = 0,763 Pr^{-0,6} \left(\frac{u_1 D}{W_{\infty}} \right)^{-0,5} Re_{\infty}^{-0,5}. \quad (VIII-28)$$

где

$$Re_{\infty} = \frac{W_{\infty} D}{\nu}.$$

Аналитически найдены формулы, по которым можно подсчитывать градиент скорости u_1 [102] при обтекании потоком тел вращения. Например, для цилиндров, нормальных к плоскому потоку,

$$u_1 = \frac{4W_{\infty}}{D}; \quad (VIII-29)$$

для сфер при натекании осесимметричного потока

$$u_1 = \frac{3W_\infty}{D}, \quad (\text{VIII-30})$$

где W_∞ — скорость невозмущенного потока (см. рис. VIII-1);
 D — диаметр цилиндра или сферы.

Для сопоставления градиентов скорости, возникающих при натекании на цилиндр (VIII-29) и плоскую преграду, получена формула

$$u_1 = \frac{\pi/2 W_\infty}{D}, \quad (\text{VIII-31})$$

где $D = 2L$;

L — расстояние от линии растекания плоского потока, равное половине диаметра цилиндра или сферы, с которыми производится сопоставление.

Сравнивая формулы (VIII-29, VIII-30 и VIII-31), замечаем, что, если носовая часть обтекаемого тела имеет более плоскую форму, то градиент скорости меньше, а следовательно, меньше и интенсивность теплоотдачи (VIII-22). Наименьший градиент скорости возникает при натекании потока на плоскую преграду (VIII-31).

§ 3. ТЕПЛОТДАЧА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ С ПЛАСТИНОЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НОРМАЛЬНО К НАПРАВЛЕНИЮ СКОРОСТИ ПОТОКА

Рассмотрим способ решения гидродинамической задачи при натекании ламинарного двумерного потока на цилиндрическое тело, ось которого перпендикулярна оси потока, в более общей постановке, чем при условии (VIII-2, VIII-3). Напомним, что при решении гидродинамической задачи на основании (VIII-2, VIII-3), полученный результат будет справедлив только для малой области течения вблизи критической точки. Подлежащий рассмотрению способ предложен Г. Блазнусом и усовершенствован К. Хименцом и Л. Хоуартом [88].

Выберем следующую систему координат: пусть ось y выходит из критической точки навстречу потоку, ось x расположена вдоль потока, растекающегося по преграде. Скорость на внешней кромке пограничного слоя представляется в виде степенного ряда относительно переменной

$$w_1 = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots, \quad (\text{VIII-32})$$

где $u_1, u_3, u_5, \dots$ — коэффициенты, зависящие исключительно от формы тела; в нашей задаче они подлежат определению.

После умножения ряда на его производную с учетом (VII-11) получим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = w_1 \frac{dw_1}{dx} = u_1^2 x + 4u_1 u_3 x^3 + u_5 (6u_1 u_5 + 3u_3^2) + \dots, \quad (\text{VIII-33})$$

Уравнение сплошности интегрируется введением функции тока $\psi(x, y)$, которая представляется так же в виде степенного ряда, но с коэффициентами, зависящими от y . Однако эти коэффициенты-функции y не должны зависеть от коэффициентов $u_1, u_3, \dots$, заданных профилем тела. При соблюдении этого условия коэффициенты-функции, зависящие от y , становятся универсальными, пригодными для обтекаемого тела любой формы, а следовательно, и пластины, расположенной поперек потока. Для распределения скоростей в пограничном слое был найден ряд, коэффициенты-функции y которого оказались универсальными [88].

Для функции тока предложен ряд

$$\psi = \sqrt{\frac{v}{u_1}} [u_1 x f_1(\eta) + 4u_3 x^3 f_3(\eta) + 6u_5 x^5 f_5(\eta) + \dots], \quad (\text{VIII-34})$$

где $\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{v}}$ — безразмерная координата.

Для составляющих скорости w_x и w_y получены следующие ряды:

$$w_x = u_1 x f'_1 + 4u_3 x^3 f'_3 + 6u_5 x^5 f'_5 + \dots; \quad (\text{VIII-35})$$

$$w_y = -\sqrt{\frac{v}{u_1}} [u_1 f_1 + 12u_3 x^2 f_3 + 30u_5 x^4 f_5 + \dots], \quad (\text{VIII-36})$$

где штрихи обозначают дифференцирование по η .

Путем совмещения уравнений движения (VIII-1), уравнения (VIII-33), выражений (VIII-35) и (VIII-36) была получена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_1'^2 - f_1 f_1'' &= 1 + f_1'', \\ 4f_1' f_3' - 3f_1'' f_3 - f_1 f_3'' &= 1 + f_3'', \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-37})$$

Здесь приведено только два уравнения для определения коэффициентов-функций f_1 и f_3 , так как в дальнейшем будем использовать выражения (VIII-32), (VIII-34), (VIII-35), (VIII-36) только с двумя первыми членами соответствующего ряда. Граничные условия к системе (VIII-37) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} f_1 = f_1' = 0, \quad f_3 = f_3' = 0, \dots \text{ при } \eta = 0; \\ f_1' = 1, f_3' = \frac{1}{4}, \dots \text{ при } \eta = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-38})$$

Система уравнений (VIII-37) и граничных условий (VIII-38) решена численно.

Итак, если известны коэффициенты $u_1, u_3, \dots$, то гидродинамическая задача может быть решена, т. е. можно найти w_x и w_y .

Для определения теплоотдачи необходимо решить уравнение энергии (VIII-16), используя для этой цели результаты решения гидродинамической задачи. Распределение температуры по толщине теплового пограничного слоя можно представить в форме следующего ряда [113]:

$$\theta(x, y) = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = F_0(\eta) + \frac{u_3}{u_1} x^2 F_2(\eta) + \frac{u_5}{u_1} x^4 F_4(\eta) + \dots, \quad (\text{VIII-39})$$

где $F_0, F_2, F_4, \dots$ — универсальные коэффициенты-функции, не зависящие от коэффициентов $u_1, u_2, u_3, \dots$, но зависящие от числа Прандтля.

Для определения этих функций получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} F_0'' + f_1 F_0' &= 0, \\ \frac{1}{\text{Pr}} F_2'' + f_1 F_2' - 2f_1' F_2 &= -12f_3 F_0', \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-40})$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} F_0 = F_2 = 0 & \quad \text{при } \eta = 0, \\ F_0 = 1, F_2 = 0 & \quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-41})$$

Функция f_1 в (VIII-40) та же, что и в (VIII-37). Система уравнений (VIII-40) с граничными условиями (VIII-41) решена численно [113].

Выражение для определения локального теплового потока к стенке с учетом (VIII-39) и выражения для η (VIII-6) можно представить в следующей форме:

$$q_w(x) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\lambda (T_\infty - T_w) \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \times \left[F_0'(0) + \frac{u_3}{u_1} x^2 F_2'(0) + \frac{u_5}{u_1} x^4 F_4'(0) + \dots \right]. \quad (\text{VIII-42})$$

Тепловой поток можно представить и в другой форме

$$q_w(x) = \alpha (T_w - T_\infty). \quad (\text{VIII-43})$$

Приравняв правые части (VIII-42) и (VIII-43) и оставляя только два члена ряда, найдем

$$\alpha = \lambda \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \left[F_0'(0) + \frac{u_3}{u_1} x^2 F_2'(0) + \dots \right]. \quad (\text{VIII-44})$$

Коэффициенты $F_0'(0)$ и $F_2'(0)$, необходимые для расчета по формуле (VIII-44), приводятся в работе [113]. Для числа Прандтля $\text{Pr} = 0,7$ эти коэффициенты равны

$$F_0' = 0,496, \quad F_2' = 0,448.$$

Представим коэффициент теплоотдачи α в безразмерной форме

$$\text{Nu} = \frac{\alpha b_0}{\lambda} = b_0 \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \left[0,496 + 0,448 \frac{u_3}{u_1} x^2 + \dots \right]. \quad (\text{VIII-45})$$

Как уже отмечалось, коэффициенты $u_1, u_3, \dots$ зависят от формы обтекаемого тела и скорости натекающего потока.

Рассмотрим взаимодействие струи с пластиной, расположенной нормально к направлению ее скорости. Скорость струи жидкости, истекающей из сопла, уменьшается по длине струи в результате взаимодействия с окружающей средой. Поэтому коэффициенты $u_1, u_3, \dots$ при взаимодействии струи с преградой будут иметь различные значения в зависимости от расстояния h между срезом сопла и преградой. Для конкретных условий величины $u_1, u_3, \dots$ определяются экспериментально. В качестве примера приведем формулы для определения значений $u_1, u_3, \dots$ при условиях: плоская струя воздуха, сформированная в различных соплах (ширина щели $b_0 = 5,5 \text{ мм}, 10,4 \text{ мм}, 15,2 \text{ мм}$, длина щели $l_0 = 135 \text{ мм}$) и истекающая из сопел с различными скоростями, взаимодействует с плоской преградой; при этом числа Рейнольдса $\text{Re}_0 = \frac{w_0 b_0}{\nu_0}$, отнесенные к параметрам воздуха на срезе сопла, изменялись в диапазоне $18\,000 \leq \text{Re}_0 \leq 90\,000$. Максимальная скорость истечения воздуха из сопла не превышала 80 м/сек ; температура струи на срезе сопла поддерживалась равной температуре окружающего воздуха.

Опыты, проведенные в указанных условиях, показали, что на участке длины струи от $\bar{h} = 0$ до $\bar{h} = 6,5$ (здесь $\bar{h} = \frac{h}{b_0}$ — безразмерное расстояние от среза сопла до преграды) скорость потока воздуха остается постоянной и равной скорости истечения (на срезе сопла). Для определения безразмерной скорости на участке длины струи $6,5 \leq \bar{h} \leq 16$ (где скорость потока уменьшается) была получена следующая экспериментальная зависимость:

$$\frac{\bar{w}_y}{w_0} = \frac{2,54}{\bar{h}}, \quad (\text{VIII-46})$$

где $\bar{w}_y$ — осредненное значение скорости потока на оси струи (ось y совмещена с осью струи).

Для того чтобы определить коэффициенты $u_1, u_3, \dots$, надо знать закон изменения скорости на внешней границе пограничного слоя (вдоль оси x), который образовался на пластине при растекании по ней воздуха. Опыты показали, что скорость на внешней границе пограничного слоя w_1 изменяется от нуля в критической точке до максимального

значения w_* на расстоянии x_* от нее. На участке длины пластины $0 \leq \frac{x}{x_*} \leq 1$ скорость w_1 возрастает от нуля до w_* , а давление падает от максимального до атмосферного. Область течения пристенной струи, ограниченная размерами $0 \leq \frac{x}{x_*} \leq 1$, называется областью градиентного течения; здесь происходит наиболее интенсивный теплообмен, и поэтому исследование этой области имеет важное практическое значение.

Закон изменения скорости w_1 на внешней границе пристенного пограничного слоя в градиентной области течения определен экспериментально. Для диапазона расстояний от среза сопла до пластины $2 \leq \bar{h} \leq 14$ этот закон примет вид

$$\frac{w_1}{w_*} = 2 \frac{x}{x_*} - 1,6 \left(\frac{x}{x_*} \right)^3 + 0,6 \left(\frac{x}{x_*} \right)^5. \quad (\text{VIII-47})$$

Для определения скорости w_* и координаты x_* экспериментально получены следующие зависимости:

$$\text{при } 2 < \bar{h} \leq 7, \quad \frac{w_*}{w_0} = \bar{h}^{-0,05}, \quad \frac{x_*}{b_0} = 1,9\bar{h} + 0,07; \quad (\text{VIII-48})$$

$$\text{при } 7 < \bar{h} \leq 14, \quad \frac{w_*}{w_0} = 2,52\bar{h}^{-0,5}, \quad \frac{x_*}{b_0} = 0,34\bar{h}^{0,9}. \quad (\text{VIII-49})$$

Сопоставляя (VIII-32) и (VIII-47), определим искомые коэффициенты

$$u_1 = 2 \frac{w_*}{x_*}; \quad u_3 = -1,6 \frac{w_*}{x_*^3}; \quad u_5 = 0,6 \frac{w_*}{x_*^5}. \quad (\text{VIII-50})$$

Зная величины $u_1, u_3, u_5, \dots$, можно вычислить коэффициент теплоотдачи при взаимодействии струи с преградой по формуле (VIII-45).

Путем сопоставления значений коэффициентов теплоотдачи, вычисленных по формуле (VIII-45), с измеренными, установлено, что последние оказываются значительно больше первых, при некоторых условиях, в два и более раз. Высказано предположение о том, что такая большая разница между вычисленными и измеренными коэффициентами теплоотдачи обусловлена влиянием свободной турбулентности натекающего потока газа на процесс переноса теплоты в пристеночном пограничном слое. Различают *пристеночную турбулентность*, возбужденную неподвижной стенкой, причем стенка оказывает на турбулентность постоянное влияние, и *свободную турбулентность*, которая возникает при отсутствии твердых стенок. Свободная турбулентность в струях возникает в результате взаимодействия струи с окружающей средой. Турбулентность в струях анизотропная, т. е. ее систематические характерные особенности зависят от направления.

Влияние турбулентных пульсаций скорости в натекающем потоке газа на теплообмен в зоне взаимодействия потока с твердым телом было установлено в нашей стране еще в 1939 г. [23].

Влияние степени турбулентности на теплоотдачу при взаимодействии плоской турбулентной струи с пластиной

Допустим, что увеличение интенсивности теплоотдачи при взаимодействии турбулентной струи с преградой по сравнению с теплоотдачей при взаимодействии ламинарной струи с преградой происходит в основном вследствие влияния пульсаций продольной составляющей скорости. Степень турбулентности, обусловленную продольной составляющей струйного потока, представим в форме

$$\varepsilon_y = \frac{\sqrt{\overline{w_y'^2}}}{\overline{w_y}} \cdot 100, \quad (\text{VIII-51})$$

где ε_y — степень турбулентности, выраженная в процентах; $\overline{w_y'}$ — пульсация скорости вдоль оси y .

Увеличение интенсивности теплоотдачи с ростом степени турбулентности ε_y объясняют следующими эффектами.

Во-первых, более ранним переходом пристеночного ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Начиная от критической точки вдоль пластины (координата x), возникает ламинарный пограничный слой, затем слой с переходным режимом движения, а после него развивается турбулентный пограничный слой с сохранением вязкого подслоя.

Во-вторых, модификацией потока в ламинарном пограничном слое. Можно предположить, что турбулентные пульсации проникают в ламинарный пограничный слой и как бы уменьшают его толщину; в пользу такого предположения свидетельствуют измерения, сделанные в работе [99].

В-третьих, влиянием на турбулентную часть турбулентного пограничного слоя. Степень турбулентности вдоль оси плоской струи, параметры которой приведены выше, измерена с помощью термоанемометра постоянной температуры* в работе [98]. Некоторые результаты измерений представлены на рис. VIII-3. Начальная степень турбулентности потока (на срезе сопла) зависит от предыстории потока, для описанных выше условий эксперимента. Она изменялась в пределах от 0,4 до 1,0%.

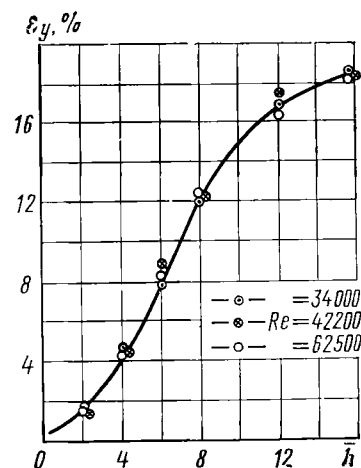


Рис. VIII-3. Изменение степени турбулентности вдоль плоской изотермической струи воздуха $\varepsilon_y = f(\bar{h})$ [98]

* Описание принципа работы термоанемометра постоянной температуры см. в [85].

Теперь выведем формулу для определения коэффициента теплоотдачи в окрестности критической точки при взаимодействии плоской турбулентной струи с пластиной, расположенной нормально к направлению ее скорости. Для этого воспользуемся гипотезой, согласно которой влияние свободной турбулентности натекающего потока на теплоотдачу в пристеночном пограничном слое можно учесть, введя в уравнение пограничного слоя коэффициент, учитывающий дополнительную вязкость; согласно этой гипотезе свободная турбулентность как бы увеличивает вязкость в пристеночном пограничном слое. В работе [110] для коэффициента, учитывающего дополнительную вязкость ε_σ , предложена следующая зависимость:

$$\varepsilon_\sigma = \kappa \varepsilon_y \bar{w}_y y, \quad (\text{VIII-52})$$

где κ — коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально;

y — расстояние от поверхности пластины.

Допустим, что коэффициенты, учитывающие дополнительную вязкость ε_σ и дополнительную теплопроводность ε_q , равны между собой, т. е. $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_q = \varepsilon$.

С учетом принятых допущений и обозначений система уравнений пограничного слоя, возникающего на пластине при натекании на нее турбулентной плоской струи, примет вид:

$$\left. \begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + (\nu + \varepsilon) \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0, \\ w_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y} &= (a + \varepsilon) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-53a, б, в})$$

С учетом обозначений

$$\eta = \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} y, \quad w_x = u_1 f'(\eta), \quad w_y = -\sqrt{u_1 \nu} f(\eta),$$

а также

$$\Theta = \frac{T_w - T(\eta)}{T_w - T_\infty},$$

и

$$b = \kappa \varepsilon_y w_1 \sqrt{\frac{1}{u_1 \nu}}, \quad (\text{VIII-54})$$

система уравнений (VIII-53) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} f'^2 - f''(f + b) &= (1 + b\eta) f'', \\ \Theta'' + \frac{\Theta'(f + b)}{\left(b\eta + \frac{1}{\text{Pr}}\right)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-55})$$

Граничные условия к системе уравнений (VIII-55) можно представить в форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \eta = 0, \quad f &= 0, \quad f' = 0, \quad \theta = 0; \\ \text{при } \eta \rightarrow \infty, \quad f' &= 1, \quad \theta = 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-56})$$

Решение системы уравнений (VIII-55) с граничными условиями (VIII-56) получено на ЭВМ [110, 98, 99] и для случая $\text{Pr} = 0,7$ имеет вид

$$\text{Nu} = \text{Re}^{0,5} (0,5 + 0,164 b), \quad (\text{VIII-57})$$

где

$$\text{Nu} = \frac{\alpha b_0}{\lambda}, \quad \text{Re} = \frac{u_1 b_0^2}{\nu}.$$

Для условий натекания плоской струи (описанной выше) на преграду экспериментально получены следующие зависимости для u_1 :

$$\left. \begin{aligned} \text{при } 2 < \bar{h} \leq 7, \quad u_1 &= \frac{w_0}{b_0} \bar{h}^{-0,12}; \\ \text{при } 7 < \bar{h} \leq 14, \quad u_1 &= \frac{w_0}{b_0} \bar{h}^{-1,4}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-58})$$

Чтобы вычислить величину b по соотношению (VIII-54), необходимо определить коэффициент пропорциональности κ . Путем сравнения коэффициентов теплоотдачи, найденных экспериментально в критической точке, с вычисленными по формуле (VIII-57), получена величина $\kappa = 0,11$.

Формулы для определения коэффициента теплоотдачи при натекании плоской турбулентной струи ($\text{Pr} = 0,7$) на пластину, расположенную нормально к направлению скорости потока, с учетом влияния свободной турбулентности, получены путем совмещения (VIII-57), (VIII-58) и (VIII-54) и имеют вид [3]:

для диапазона изменения критерия Re

$$1,8 \cdot 10^4 \leq \text{Re}_0 \leq 5 \cdot 10^4 \quad \text{и} \quad \kappa = 0,11$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } 2 < \bar{h} \leq 7, \quad \text{Nu} &= 0,5 \frac{\text{Re}_0^{0,5}}{\bar{h}^{0,06}} \times \\ &\times (1 + 0,00035 \bar{h}^{0,06} \text{Re}_0^{0,5} \varepsilon_y), \\ \text{при } 7 < \bar{h} \leq 14, \quad \text{Nu} &= 1,9 \frac{\text{Re}_0^{0,5}}{\bar{h}^{0,7}} \times \\ &\times (1 + 0,00024 \bar{h}^{0,2} \text{Re}_0^{0,5} \varepsilon_y); \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-59})$$

для диапазона изменения критерия Re

$$5 \cdot 10^4 < Re_0 \leq 9 \cdot 10^4 \text{ и } \kappa = 0,095$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \bar{h} \leq 7, \quad Nu &= 0,5 \frac{Re_0^{0,5}}{h^{0,06}} \times \\ &\times (1 + 0,0003 \bar{h}^{0,06} Re_0^{0,5} \varepsilon_y), \\ \text{при } 7 < \bar{h} \leq 12, \quad Nu &= 1,9 \frac{Re_0^{0,5}}{h^{0,7}} \times \\ &\times (1 + 0,0002 \bar{h}^{0,2} Re_0^{0,5} \varepsilon_y). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-60})$$

Для того чтобы формулами (VIII-59) и (VIII-60) было удобно пользоваться, критерий Рейнольдса, входящий в них, вычислен по параметрам на срезе сопла $Re_0 = \frac{\omega_0 d_0}{\nu}$.

§ 4. ТЕПЛОТДАЧА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ С ПЛАСТИНОЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НОРМАЛЬНО К НАПРАВЛЕНИЮ СКОРОСТИ ПОТОКА

Представим формулу (VIII-27) для случая натекания осесимметричной струи, сформированной в сопле диаметром на срезе d_0 на пластину, в виде

$$Nu = 0,763 Pr^{0,4} \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} d_0, \quad (\text{VIII-61})$$

где $u_1 = \frac{\omega_1}{x}$; x — расстояние от критической до заданной точки вдоль поверхности пластины (оси x).

Формулу (VIII-61) можно использовать для вычисления коэффициента теплоотдачи в критической точке при взаимодействии ламинарной струи с преградой, если известны значения коэффициента u_1 для соответствующих критерия Рейнольдса $Re_0 = \frac{u_1 d_0^2}{\nu}$ и расстояния от среза сопла до преграды $\bar{h} = \frac{h}{d_0}$ (здесь h — расстояние от среза сопла до преграды, м).

Зависимости $u_1 = f(\bar{h})$ были определены экспериментально для случая натекания изотермической струи воздуха на пластину; максимальная скорость воздуха на срезе сопла в опытах не превышала 100 м/сек; эти зависимости имеют вид [5]:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } 2 < \bar{h} \leq 6, \quad u_1 &= 1,5 \frac{\omega_0}{d_0} \bar{h}^{(-0,22)}, \\ 6 < \bar{h} \leq 16, \quad u_1 &= 16,1 \frac{\omega_0}{d_0} \bar{h}^{(-1,54)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-62})$$

Формулы для определения коэффициента теплоотдачи при натекании осесимметричной струи ($Pr = 0,7$) на пластину получим, совмещая (VIII-61) и (VIII-62)

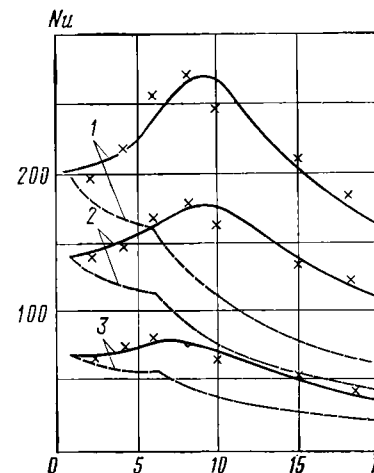
$$\left. \begin{aligned} \text{при } 2 < \bar{h} \leq 6, \quad Nu &= 0,935 \frac{Re_0^{0,5}}{h^{0,11}} Pr^{0,4}, \\ \text{при } 6 < \bar{h} \leq 16, \quad Nu &= 3,06 \frac{Re_0^{0,5}}{h^{0,77}} Pr^{0,4}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-63})$$

где

$$Re_0 = \frac{\omega_0 d_0}{\nu}.$$

Рис. VIII-4. Влияние свободной турбулентности на теплоотдачу при взаимодействии осесимметричной струи с нагреваемой пластиной, расположенной нормально к направлению ее скорости:

— — — $Nu = f(\bar{h})$ зависимость получена по формулам (VIII-63), без учета влияния свободной турбулентности струи,
— — — $Nu^3 = f_1(\bar{h})$ зависимость получена экспериментально,
× — — — $Nu_0^3 = f_2(\bar{h})$ точки получены по формулам (VIII-64) с учетом влияния свободной турбулентности струи,
1 — $Re_0 = 56\ 000$, 2 — $Re_0 = 28\ 000$, 3 — $Re_0 = 7\ 000$



На рис. VIII-4 представлены зависимости $Nu = f(\bar{h})$ (штриховые линии), полученные по формулам (VIII-63) для различных чисел Рейнольдса $Re_0 = \frac{\omega_0 d_0}{\nu}$, и зависимости $Nu^3 = f(\bar{h})$ (сплошные линии), полученные экспериментально.

Сравнивая эти зависимости, устанавливаем, что формулы (VIII-63) дают заниженные результаты по сравнению с экспериментальными данными. Это происходит потому, что в них не учтено влияние свободной турбулентности струи на теплоотдачу в пристеночном пограничном слое.

Формулы для определения коэффициента теплоотдачи в критической точке при взаимодействии осесимметричной турбулентной струи с нагреваемой пластиной, учитывающие влияние свободной турбулентности струи, получены путем совмещения зависимостей $Nu = f(h)$, $Nu^3 = f(h)$ с зависимостью $\varepsilon_y = f(\bar{h})$ (VII-51) для рассматриваемой осесимметричной струи. В результате имеем:

при $2 < h \leq 6$,

$$\left. \begin{aligned} \text{при } 6 < \bar{h} \leq 16, \\ \text{при } 2 < h \leq 6, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{Nu}_0^* &= 0,935 \frac{\text{Re}_0^{0,5}}{\bar{h}^{0,11}} (1 + 0,00197 \bar{h}^{1,75} \text{Re}_0^{0,24}) \text{Pr}^{0,24}; \\ \text{Nu}_0^* &= 3,06 \frac{\text{Re}_0^{0,5}}{\bar{h}^{0,77}} (1 + 0,0197 \bar{h}^{0,66} \text{Re}_0^{0,24}) \text{Pr}^{0,4}, \end{aligned} \quad (\text{VIII-64})$$

где

$$\text{Re}_0 = \frac{w_0 d_0}{\nu}.$$

Формулы (VIII-64) справедливы при $7 \cdot 10^3 \leq \text{Re}_0 \leq 5,6 \cdot 10^4$ и $\text{Pr} = 0,7$.

Отметим, что расчетные зависимости для определения коэффициента теплоотдачи в критической точке при взаимодействии осесимметричной струи с преградой можно получить, используя ту же гипотезу, что и при выводе формул (VIII-59) и (VIII-60) для плоской струи. В настоящем параграфе для вывода формул (VIII-64) применен другой, более простой способ.

ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Движение жидкости в данной системе под действием неоднородного поля массовых сил, приложенных к частицам жидкости внутри системы, и обусловленное внешними полями (гравитационным, магнитным, электрическим), называют свободным движением, или свободной конвекцией. Свободное движение под действием гравитационного поля в системе с неоднородным рас-

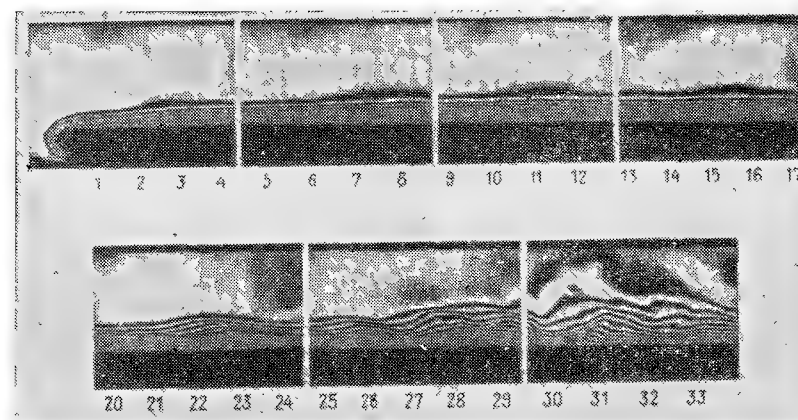


Рис. IX-1. Интерференграмма обтекания вертикальной пластины при свободной конвекции. Расстояние от нижнего края пластины в дюймах (1 дюйм = 25,4 мм) отмечено цифрами [92]

пределением плотности жидкости* называют гравитационным свободным движением, или гравитационной свободной конвекцией [74].

Перенос теплоты, происходящий при обтекании твердого тела потоком жидкости при ее свободном движении, называют теплоотдачей при свободном движении жидкости, или теплоотдачей при свободной конвекции.

В настоящей главе рассмотрена теплоотдача только при гравитационной свободной конвекции, а поэтому слово «гравитационная» в дальнейшем изложении опущено.

* Неоднородное распределение плотности может быть вызвано неоднородным распределением температуры, концентрации какого-либо компонента в смеси или наличием фаз с разной плотностью.

Рассмотрим процесс свободного движения вдоль вертикальной нагретой пластины, расположенной в неограниченном пространстве, заполненном жидкостью. В этих условиях вдоль пластины снизу вверх движется только тонкий слой жидкости, а основная масса жидкости остается в состоянии покоя. Если толщина движущегося слоя жидкости значительно меньше высоты пластины, то его можно рассматривать как пограничный слой. На рис. IX-1 приведена интерферограмма* течения жидкости вдоль вертикальной нагретой пластины; черные линии представляют собой изотермы, цифры на рисунке указывают расстояние в дюймах от нижнего края пластины (1 дюйм = 25,4 мм). На рисунке отчетливо видно, как ламинарный режим движения в пограничном слое (изотермы — прямые линии) постепенно переходит в турбулентный (изотермы — волнообразные линии).

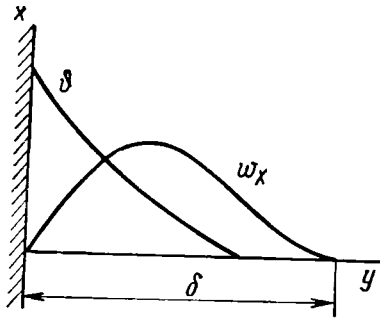


Рис. IX-2. Распределение температуры и скорости по толщине пограничного слоя δ при свободной конвекции вдоль вертикальной стенки

На рис. IX-2 изображено распределение скорости w_x и температуры $\theta = T - T_\infty$ по толщине пограничного слоя δ (здесь T — температура в любой точке пограничного слоя, T_∞ — температура жидкости за пределами пограничного слоя).

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для тела, расположенного в неограниченном пространстве, когда движение жидкости наблюдается только у его поверхности, а остальная ее масса остается неподвижной, можно составить уравнения пограничного слоя. Путем анализа порядка величин и отбрасывания малых, так же как это было сделано для случая вынужденного движения (гл. VII), из уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости (II-29 и II-30) получим уравнения движения для стационарного двумерного пограничного слоя с учетом (VII-9) и (VII-10) при свободной конвекции в проекции на ось x в следующем виде:

$$\rho_\infty w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho_\infty w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \quad (\text{IX-1})$$

а на ось y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

* Интерферограмма — фотография картины движения жидкости. Такие картины получают следующим образом: луч света, пронизывающий изучаемый слой жидкости, направленный нормально к градиенту ее плотности; по разному отклоняется в сторону в зависимости от величины плотности в данной точке, и на экране можно получить картину, где точки с одинаковой плотностью, а следовательно, и температурой сольются в одну линию — *изотерму*.

Во всех членах этого уравнения, кроме X , плотность принимается постоянной как в несжимаемой жидкости. Для определения объемной силы X , вызывающей движение жидкости, следует учесть изменение плотности, вызванное перепадом температуры, существующим в жидкости, тогда

$$X = g_x (\rho_\infty - \rho), \quad (\text{IX-2})$$

где g_x — составляющая гравитационного ускорения в направлении X .

Представим коэффициент объемного расширения (гл. III) в виде

$$\beta = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty \theta}.$$

Полагая, что β не зависит от температуры, запишем (IX-2) в другой форме

$$X = g_x \beta \rho_\infty \theta. \quad (\text{IX-3})$$

Уравнение движения для пограничного слоя при свободной конвекции с учетом (IX-3) имеет вид

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = g_x \beta \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (\text{IX-4})$$

Уравнение сплошности с учетом $\rho = \text{const}$ может быть представлено в виде

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{IX-5})$$

Уравнение энергии без учета диссипативной функции (VII-36) можно представить в виде

$$w_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (\text{IX-6})$$

Систему дифференциальных уравнений (IX-4), (IX-5) и (IX-6) в частных производных для плоской вертикальной пластины ($\frac{\partial p}{\partial x} = 0$) удалось путем введения новых переменных перевести в обыкновенные и решить для ламинарного пограничного слоя [92].

Результат решения в соответствии с (III-33) имеет вид

$$\text{Nu}_x = F(\text{Pr}) \sqrt[4]{\text{Gr}_x}, \quad (\text{IX-7})$$

где $\text{Nu}_x = \alpha_x x / \lambda$ — локальное число Нуссельта;

x — координата от нижнего края пластины;

$\alpha_x = \frac{q_x}{T_w - T_\infty}$ — коэффициент теплоотдачи;

$F(\text{Pr})$ — функция, зависящая от числа Прандтля. Ее значения даны в табл. IX-1;

$\text{Gr}_x = \beta \frac{g_x x^3}{\nu^2} \theta$ — локальное число Грасгофа (III-26).

Путем преобразований, аналогичных преобразованиям (VII-28), из (IX-7) можно получить формулу, чтобы определить среднее число Нуссельта для всей пластины длиной l

$$\overline{Nu}_l = \frac{4}{3} F(\text{Pr}) \sqrt[4]{Gr_l}. \quad (\text{IX-8})$$

Т а б л и ц а IX-1

Pr	0,01	0,72	1,0	2,0	10,1	100,0	1000,0
$\frac{4}{3} F(\text{Pr})$	0,0765	0,475	0,535	0,675	1,0	2,06	3,74

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Динамический пограничный слой при вынужденной конвекции определялся интегральным соотношением (VII-13). Для свободной конвекции это соотношение необходимо дополнить членом, учитывающим подъемную силу. Для единицы объема подъемная сила определяется по (IX-3), а для элемента жидкости с высотой dx (вдоль вертикальной пластины) — толщиной h (нормально к пластине), причем $h > \delta$ (см. рис. IX-2), и шириной, равной единице (поперек пластины), подъемную силу можно представить в виде

$$dx \cdot 1 \cdot g_x \cdot \rho \cdot \beta \int_0^h \vartheta dy.$$

Внесем полученный член в (VII-13) и, учитывая, что скорость W_∞ за пределами пограничного слоя равна нулю, а также принимая $\partial p / \partial x = 0$, получим интегральное уравнение для пограничного слоя при свободной конвекции в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^h w_x^2 dy = g_x \beta \int_0^h \vartheta dy - \nu \left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y=0}. \quad (\text{IX-9})$$

Интегральное уравнение энергии пограничного слоя (VII-38) остается без изменения и имеет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^h w_x \vartheta dy = -a \left(\frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0}. \quad (\text{IX-10})$$

Интегральное соотношение может быть решено, если известны распределения скорости и температуры по толщине пограничного слоя.

Распределение температуры ϑ по толщине ламинарного пограничного слоя должно иметь характер, изображенный на рис. IX-2; допустим, что оно имеет форму параболы следующего вида:

$$\vartheta = \vartheta_w \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2, \quad (\text{IX-11})$$

где $\vartheta_w = T_w - T_\infty$ — избыточная температура стенки;
 δ — толщина пограничного слоя.

Распределение (IX-11) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_w \text{ при } y = 0, \\ \vartheta &= 0 \text{ при } y = \delta. \end{aligned}$$

Распределение скорости w_x поперек пограничного слоя должно иметь характер, изображенный на рис. IX-2; скорость при свободном движении жидкости вдоль вертикальной пластины распределяется по толщине пограничного слоя таким образом, что она равна нулю у стенки ($y = 0$) и на внешней границе ($y = \delta$); допустим, что распределение скорости имеет форму параболы

$$w_x = u_1 \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2, \quad (\text{IX-12})$$

где u_1 — произвольная функция с размерностью скорости; распределение (IX-12) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} w_x &= 0 \text{ при } y = 0, \\ w_x &= 0 \text{ при } y = \delta. \end{aligned}$$

При этих допущениях удастся решить (IX-10).

Результат решения интегральных соотношений (IX-9) и (IX-10) для ламинарного пограничного слоя при условии, что толщина пограничного слоя δ в уравнениях (IX-11) и (IX-12) одна и та же, можно представить в виде [92]

$$Nu_x = 0,508 \text{Pr}^{0.5} (0,952 + \text{Pr})^{-0.25} Gr_x^{0.25}. \quad (\text{IX-13})$$

Среднее значение числа Нуссельта для пластины длиной l можно определить так же, как для (IX-8)

$$\overline{Nu}_l = \frac{4}{3} Nu_x. \quad (\text{IX-14})$$

Отметим, что результаты расчета по формуле (IX-13) отличаются всего на несколько процентов от результата, полученного по точной формуле (IX-7). Формула (IX-13) дает несколько завышенные значения коэффициента теплоотдачи α по сравнению с формулой (IX-7).

Для турбулентного пограничного слоя уравнения, описывающие распределения температуры и скорости по толщине пограничного слоя, были предложены Эккертом [92]

$$\vartheta = \vartheta_w \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] \quad (\text{IX-15})$$

и

$$w_x = u_1 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^4. \quad (\text{IX-16})$$

Решение интегральных соотношений (IX-9) и (IX-10) для турбулентного пограничного слоя было сделано Эккертом [92]. Результат этого решения имеет вид

$$Nu_x = 0,0295 Gr_x^{2/5} \cdot Pr^{7/15} [1 + 0,494 Pr^{2/3}]^{-2/5}. \quad (IX-17)$$

Среднее значение числа Нуссельта можно получить по формуле (IX-14).

Переход ламинарного режима течения в турбулентный для пограничного слоя, возникающего при свободной конвекции воздуха, происходит при критериях Грасгофа порядка $Gr_x = 10^9$.

В приведенных расчетных формулах все физические константы жидкости приняты постоянными, не зависящими от температуры. Поэтому при больших разностях температур $T_w - T_\infty$ эти формулы могут дать значительную ошибку.

Для ламинарного пограничного слоя на изотермических вертикальных пластинах разработан метод, позволяющий учесть влияние температуры следующим образом. Предлагается все физические константы газа определять при следующей температуре [92]:

$$t^* = t_w - 0,38 (t_w - t_\infty). \quad (IX-18)$$

§ 3. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Расчетные формулы, полученные аналитически для ламинарного пограничного слоя при свободной конвекции, не всегда точно совпадают с экспериментальными данными. Например, при малых значениях чисел Грасгофа ($Gr < 10^4$) результаты, полученные по формулам, не совпадают с экспериментальными данными, так как в этом случае толщина пограничного слоя слишком велика по отношению к размерам тела, и уравнения пограничного слоя оказываются непригодными для описания реальной физической обстановки. В этом случае необходимо решать полную систему дифференциальных уравнений Навье—Стокса, неразрывности и энергии без каких-либо упрощений. Эта задача весьма трудоемка.

Трудно учесть влияние переменности физических констант жидкости на теплоотдачу. Для ламинарного пограничного слоя в принципе эта задача может быть решена при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений пограничного слоя и даже полных уравнений Навье—Стокса, неразрывности и энергии. Однако эта задача весьма трудоемка. Отметим, что теплоотдача в условиях турбулентного пограничного слоя при $Gr > 10^9$ не может быть решена аналитически, так как механизм переноса теплоты окончательно не установлен.

Перечисленные обстоятельства привели к тому, что многие задачи свободной конвекции в неограниченном пространстве были решены экспериментально. Были проведены исследования с воздухом, водородом, углекислотой, водой, анилином, глицерином, четыреххлористым

углеродом, различными маслами и др. (во всех случаях $Pr \geq 0,7$). Теплоотдача в указанных жидкостях определялась для тел различной формы и размеров (диаметр проволок и труб изменялся от 0,015 до 245 мм, диаметр шаров — от 30 мм до 16 м, высота пластин и труб от 0,25 до 6 м). Теплоотдача в газах измерялась при различных давлениях от 0,03 до 70 ат.

Академик М. А. Михеев [61] обобщил результаты перечисленных экспериментальных измерений и предложил следующую расчетную формулу:

$$Nu_m = c (Gr \cdot Pr)_m^n. \quad (IX-19)$$

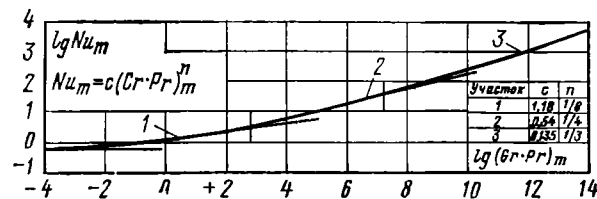


Рис. IX-3. Зависимость $Nu_m = f[lg(Gr \cdot Pr)_m]$ для различных тел при свободной конвекции в неограниченном пространстве [61]

Значения величин c и n приведены в табл. IX-2. Физические константы в формуле (IX-19) определяются по средней температуре пограничного слоя

$$t_m = \frac{t_\infty + t_w}{2}. \quad (IX-20)$$

Зависимость (IX-19) без опытных точек представлена на рис. IX-3.

Таблица IX-2

Gr · Pr	c	n
$1 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^2$	1,18	1/8
$5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^7$	0,54	1/4
$2 \cdot 10^7 - 1 \cdot 10^9$	0,135	1/3

Экспериментально установлено, что существует три режима переноса теплоты в зависимости от произведения $Gr \cdot Pr$. При первом режиме (рис. IX-3) теплоотдача слабо зависит от произведения $Gr \cdot Pr$ и теплота переносится в основном вследствие теплопроводности.

При втором режиме существует ламинарный пограничный слой и теплота переносится в основном вследствие свободной конвекции при ламинарном режиме движения жидкости.

При третьем режиме теплота переносится вследствие свободной конвекции при турбулентном режиме движения жидкости.

§ 4. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теплообмен между двумя горизонтальными пластинами

Если нагретая пластина расположена выше холодной, то свободной конвекции между ними не наблюдается, так как горячие слои жидкости расположены выше холодных; для большинства жидкостей плотность уменьшается с увеличением температуры, следовательно, более плотные слои находятся у нижней пластины. В этих условиях теплота переносится теплопроводностью.

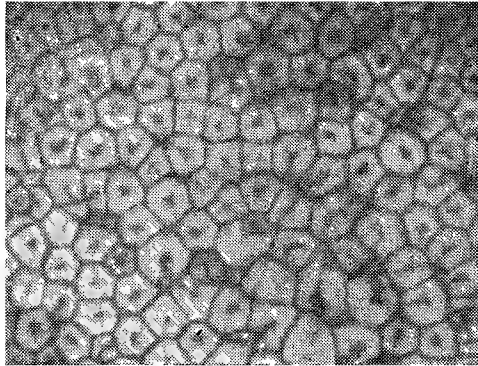


Рис. IX-4. Фотография ячеистого потока, возникающего между двумя горизонтальными пластинами при свободной конвекции [92]

Если нагретая пластина расположена ниже холодной, то после того как критерий Релея (произведение критериев Грасгофа и Прандтля $Ra = Gr \cdot Pr$) достигает значения $Ra \approx 1700$, а по более поздним исследованиям [75] $Ra \approx 1500$, в слое жидкости между пластинами возникает свободная конвекция. Поле потока имеет ячеистую форму (рис. IX-4). Визуализация потока достигнута введением в жидкость алюминиевого порошка [92].

Внутри ячеек поток движется вверх, а по их периферии — вниз. При числах Релея, меньших 1700, движение жидкости отсутствует и теплота переносится теплопроводностью. При числах Релея, превышающих 4700, ячеистая структура поля потока разрушается и режим движения между пластинами становится турбулентным.

Для воздушных прослоек получены следующие расчетные формулы [107]:

$$Nu = 0,195Gr^{0,25} \text{ при } 10^4 < Gr < 4 \cdot 10^5, \quad (IX-21)$$

$$Nu = 0,068Gr^{1/3} \text{ при } 4 \cdot 10^5 < Gr. \quad (IX-22)$$

В диапазоне изменения критерия Грасгофа $10^4 < Gr < 4 \cdot 10^5$ существует ячеистый режим движения жидкости, а при $Gr > 4 \cdot 10^5$ — турбулентный. В качестве характерного размера выбрано расстояние между пластинами.

Для прослоек из ртути, воды и некоторых масел получена следующая формула:

$$Nu = 0,069Gr^{1/3} \cdot Pr^{0,407} \quad (IX-23)$$

при

$$3 \cdot 10^5 \leq Ra \leq 7 \cdot 10^9,$$

и

$$0,02 \leq Pr \leq 8750.$$

Теплообмен между двумя вертикальными пластинами

Теплоотдача между двумя пластинами, расположенными вертикально, зависит не только от произведения $Gr \cdot Pr$, но и от двух размеров: расстояния между пластинами δ и высоты пластин H (рис. IX-5, а).

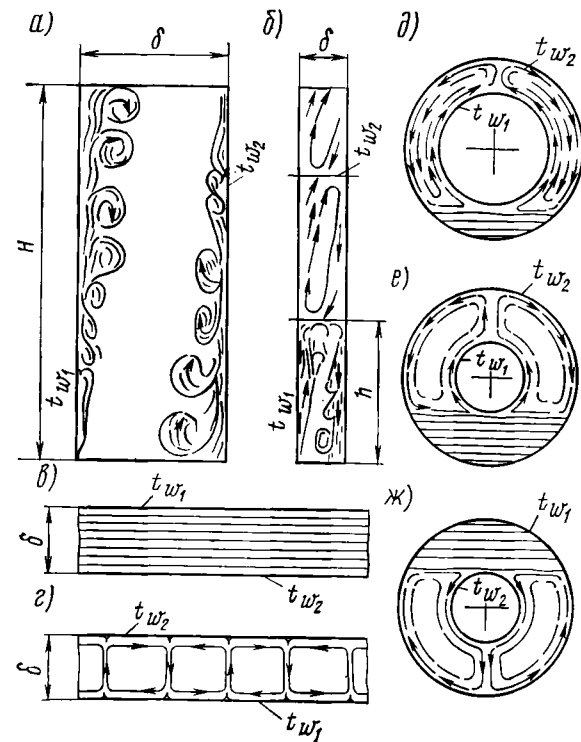
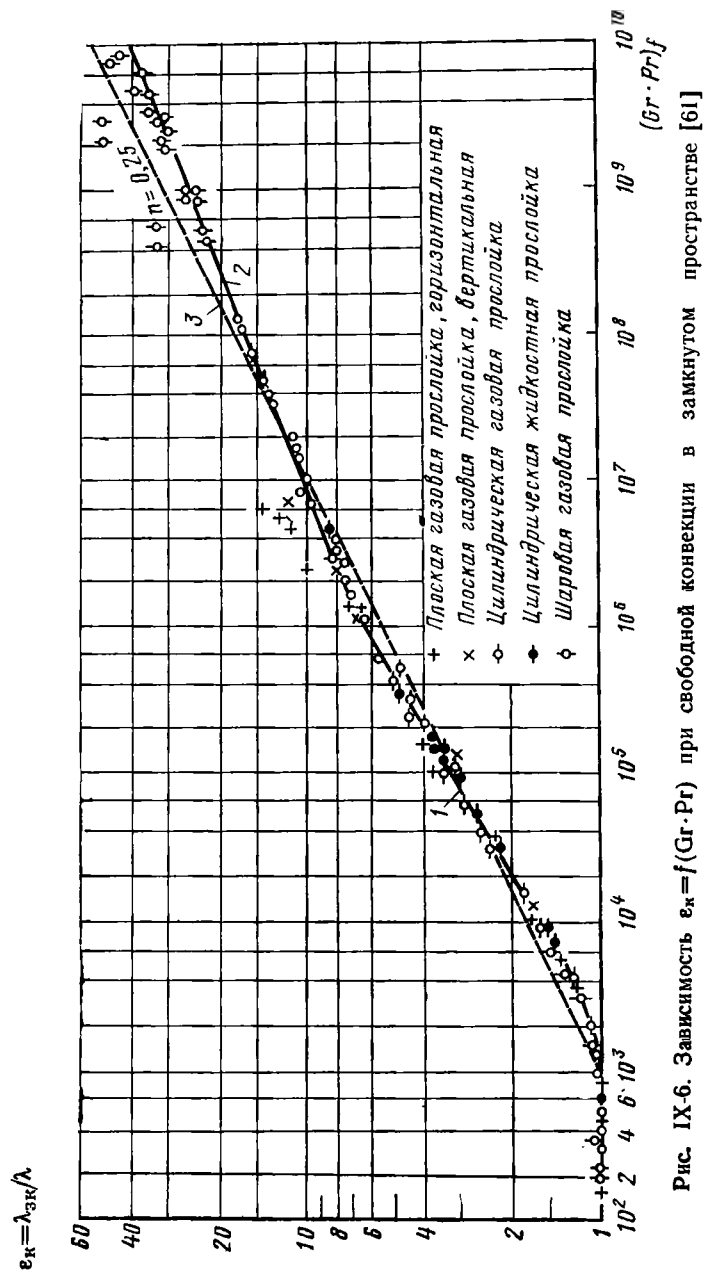


Рис. IX-5. Свободное движение жидкости в ограниченном объеме [61]

При отношении $\frac{H}{\delta} < 3$ для ламинарного пограничного слоя теплоотдачу можно считать по формулам для одиночных пластин, расположенных в неограниченном пространстве, так как в этих условиях восходящий поток на горячей пластине и нисходящий на холодной не ока-



зывают влияния друг на друга. При большем отношении $\frac{H}{\delta}$ между пластинами могут возникнуть циркуляционные контуры с высотой h (рис. IX-5, б, в), величина которой зависит не только от отношения $\frac{H}{\delta}$, но и от произведения $Gr \cdot Pr$. Естественно, что эти контуры окажут влияние на теплоотдачу.

Эккерт на основании экспериментальных данных составил следующую формулу для воздушной прослойки:

$$Nu_{\delta} = 0,119 Gr_{\delta}^{0.3} \left(\frac{H}{\delta} \right)$$

при

$$5 \cdot 10^3 \leq Gr_{\delta} \leq 10^6.$$

Академик М. А. Михеев предложил рассчитывать тепловой поток через прослойки (вертикальные, горизонтальные, цилиндрические и шаровые рис. IX-5, в, г, д, е, ж по формуле для теплопроводности)

$$q = \frac{\lambda_{эк}}{\delta} (t_{w_1} - t_{w_2}), \quad (IX-24)$$

где $\lambda_{эк}$ — эквивалентная теплопроводность, которая учитывает влияние конвективного переноса теплоты;

t_{w_1}, t_{w_2} — температуры поверхностей, разделенных прослойкой. Величина $\lambda_{эк}$ определяется из выражения

$$\frac{\lambda_{эк}}{\lambda} = \epsilon_k, \quad (IX-25)$$

где ϵ_k называют коэффициентом конвекции.

Величина ϵ_k зависит от интенсивности свободной конвекции и может быть представлена в виде следующей функции:

$$\epsilon_k = f(Gr \cdot Pr)_f. \quad (IX-26)$$

Зависимость (IX-26) определена экспериментально и представлена на рис. IX-6, где цифрами 1, 2, 3 отмечены те же области изменения величины $(Gr \cdot Pr)$, что и в табл. IX-2; при вычислении критериев Gr и Pr за определяющий размер взята толщина прослойки δ (рис. IX-5), а за определяющую температуру — средняя температура жидкости $t_f = 0,5 (t_{w_1} - t_{w_2})$. При определении ϵ_k не учитывается важный параметр $\frac{H}{\delta}$, что является недостатком приведенной методики.

Начальный участок трубы

ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

В предыдущих главах VII и VIII были рассмотрены способы теоретического анализа процессов теплоотдачи на основе теории пограничного слоя на примере продольно и поперечно омываемой пластины и вынужденного движения жидкости в гладкой круглой трубе. При этом физические константы (λ , μ , ρ , c), от которых зависит способность жидкости переносить теплоту, принимались постоянными. Кроме того, не учитывалось влияние свободной конвекции, которая может либо усиливать теплоотдачу при вынужденном движении жидкости, либо ослаблять ее. Однако теоретическое определение теплоотдачи при наружном омывании тел более сложной формы или при вынужденном движении в трубах некруглого сечения с шероховатыми стенками (практически внутренние стенки труб всегда имеют шероховатую поверхность) с учетом переменности физических констант жидкости и свободной конвекции пока невозможно. Следует отметить, что значительная часть сведений о процессах переноса теплоты, которыми мы располагаем, была получена экспериментально. Поэтому инженерные расчеты теплоотдачи в основном построены на экспериментальных сведениях.

В последнее время с появлением ЭВМ весьма успешно развиваются методы численного решения дифференциальных уравнений, описывающих теплоотдачу (гл. VII). Исследование теплоотдачи методом численного решения соответствующих дифференциальных уравнений, при достаточно точной постановке гидродинамической задачи, можно считать эквивалентным экспериментальному исследованию. Результаты численного решения точны настолько, насколько точно исходные уравнения описывают изучаемое физическое явление.

Сопоставляя три метода исследования физических явлений — аналитический, численный и экспериментальный, — следует отдавать им предпочтение в указанной здесь последовательности, с точки зрения ценности полученных результатов и их стоимости.

Экспериментальное исследование требует создания весьма дорогих стендов. Сам эксперимент обычно сложен, стоит дорого и требует большой затраты времени. Поэтому прибегают к экспериментальному исследованию только тогда, когда другие методы непригодны.

В настоящей главе рассмотрим результаты экспериментальных исследований по вынужденной конвекции.

Теплоотдача жидкости в трубе зависит от режима движения. При входе жидкости в трубу на ее стенках образуется ламинарный пограничный слой, который по мере удаления от входа утолщается и на некотором расстоянии от него заполняет все сечение трубы. Так будет развиваться процесс движения, если величина критерия Рейнольдса для рассматриваемого случая *меньше* критической (гл. VII, § 10). Процесс движения будет развиваться по-другому, если величина критерия Рейнольдса *больше* его критического значения. В этих условиях при входе жидкости в трубу на ее стенках образуется, так же как и в первом случае, ламинарный пограничный слой, который на некоторой длине от входа переходит в турбулентный. Последний будет утолщаться по мере удаления от входа до тех пор, пока не заполнит все сечение трубы. Однако у стенки трубы сохранится тонкий ламинарный слой жидкости. В этих двух случаях длина гидродинамического начального участка $l_{\text{нач}}$ (гл. VII, § 10) будет различной. Напомним, что для ламинарного режима движения жидкости в трубе $l_{\text{нач}}$ можно определять из выражения $l_{\text{нач}} = 0,03d \cdot \text{Re}$, а для турбулентного $l_{\text{нач}} \approx 25 \div 40d$.

Сразу после входа жидкости в трубу теплообмен может происходить только в тонком слое у ее внутренней поверхности, здесь ядро потока еще не участвует в теплообмене. По мере удаления жидкости от входа в трубу ядро теряет (получает) теплоту и поэтому температура на его периферии уменьшается (увеличивается), а толщина теплового пограничного слоя растет.

Участок течения в трубе, на котором поле температуры зависит от условий на входе и на котором происходит нарастание пограничного слоя до заполнения поперечного сечения трубы, называют *тепловым начальным участком* и обозначают $l_{\text{т.нач}}$.

На некотором расстоянии от входа в трубу и далее вниз по потоку между жидкостью и стенками происходит *стабилизированный теплообмен*. Это — конвективный теплообмен в трубе на таком удалении от сечения, после которого сохраняется определенный закон изменения граничных условий на стенке по длине, что поле температуры практически не зависит от характера распределения температуры и скорости в этом сечении. Когда свойства жидкости постоянны при некоторых типах граничных условий на стенке (например, при постоянной температуре стенки или постоянной плотности теплового потока на стенке), распределение температуры (отсчитанной от температуры стенки) по сечению потока при стабилизированном теплообмене остается подобным самому себе в различных сечениях трубы. При этом коэффициент теплоотдачи, отнесенный к местному температурному напору, не изменяется по длине трубы. От входа в трубу и далее вниз по потоку на длине теплового начального участка локальный α_x и средний $\bar{\alpha}$ коэффициенты теплоотдачи уменьшаются, так как на этом

участке происходит увеличение толщины ламинарного пограничного слоя. Локальный коэффициент теплоотдачи α_x уменьшается на длине $l_{т.нач.}$, а средний $\bar{\alpha}$ — на длине $\bar{l}_{т.нач.}$, причем $l_{т.нач.} < \bar{l}_{т.нач.}$ (рис. X-1, а).

Если на длине теплового начального участка ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный, то характер изменения коэффициентов теплоотдачи α_x и $\bar{\alpha}$ будет иным. Например, локальный коэффициент теплоотдачи, так же как и в предыдущем случае (рис. X-1, б), будет уменьшаться по мере возрастания толщины ламинарно-

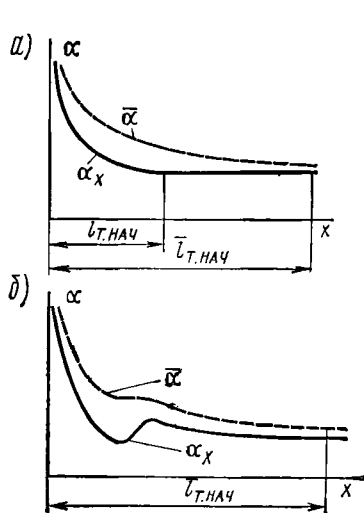


Рис. X-1. Изменение локального α_x и среднего $\bar{\alpha}$ коэффициентов теплоотдачи по длине трубы: а) ламинарный или турбулентный режим течения; б) ламинарный режим течения переходит в турбулентный

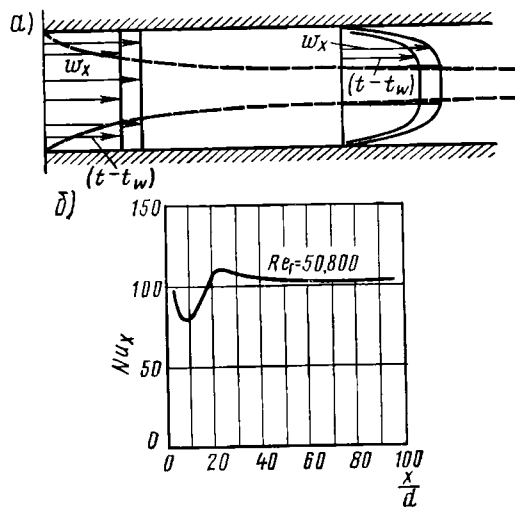


Рис. X-2. Изменение локального числа Нуссельта Nu_x по длине трубы [107]

го пограничного слоя. Достигнув минимума, α_x начнет увеличиваться по мере перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный и далее вновь уменьшаться (рис. X-1, б).

На рис. X-2, а показано развитие поперечных профилей скорости w_x и избыточной температуры $t - t_w$ вдоль трубы, начиная от входа в нее. На рис. X-2, б показано изменение числа Нуссельта вдоль трубы (безразмерной координаты $\frac{x}{d}$, здесь d — диаметр трубы) [107]. Длина теплового начального участка при турбулентном режиме движения жидкости в трубе равна $l_{т.нач.} = (10 \div 15) d$, $\bar{l}_{т.нач.} \approx 50d$ [32].

Мак—Адамс [60] составил формулу для определения среднего числа Нуссельта при турбулентном течении на начальном участке трубы

$$\overline{Nu}_f = 0,023 Re_f^{0,8} \cdot Pr_f^{1/3} [1 + (d/l)^{0,7}] (\mu_f/\mu_w)^{0,14} \quad (X-1)$$

при $Re_f > 1 \cdot 10^4$ и $0,7 \leq Pr_f < 120$,

где $\overline{Nu}_f = \alpha/\lambda$ — среднее число Нуссельта на длине трубы l , м;

d — диаметр трубы, м;

(все физические константы кроме μ_w взяты при средней по длине трубы l температуре

$$t_f = \frac{t' + t''}{2}, \quad (X-2)$$

где t', t'' — средние по сечению температуры, соответственно на входе в трубу и в сечении на расстоянии l от входа);

$Re_f = \frac{wd}{\nu}$ — критерий Рейнольдса;

$w = \frac{V}{f}$ — средняя скорость жидкости, м/сек;

V — объемный расход жидкости, м³/сек;

f — площадь поперечного сечения трубы, м²;

μ_w — вязкость при средней по длине трубы температуре стенки.

Участок стабилизированного теплообмена

Турбулентный режим. Теплоотдача при течении в трубах круглого сечения достаточно хорошо изучена экспериментально, так как этот процесс является наиболее характерным для многих теплообменных устройств. Исследования показали, что число Nu для вынужденной конвекции в трубах зависит от критериев Рейнольдса и Прандтля, от качества внутренней поверхности стенок (шероховатость), от изменения свойств переноса (λ, μ, c) под влиянием температуры, от изменения плотности жидкости под влиянием температуры или давления.

Помимо непосредственного влияния переменности коэффициента вязкости μ на свойства переноса (количества движения) переменность оказывает еще и косвенное влияние на интенсивность теплоотдачи. Косвенное влияние состоит в следующем: температура изменяет вязкость μ , а последняя оказывает влияние на распределение скорости. Это обстоятельство приводит к тому, что интенсивность теплоотдачи оказывается зависящей от направления теплового потока.

Пусть тепловой поток направлен от жидкости к внутренней стенке. В этом случае жидкость у поверхности стенки охлаждается, ее вязкость в этой области изменяется, что приводит к изменению толщины пристенного слоя,двигающегося с малой скоростью, а следовательно, и к изменению теплоотдачи, так как этот слой представляет собой основное тепловое сопротивление.

Вязкость газов, как правило, уменьшается с понижением температуры, а капельных жидкостей возрастает. Поэтому интенсивность теплоотдачи в газах будет увеличиваться, а в жидкостях уменьшаться, если тепловой поток направлен от оси трубы к ее внутренней поверхности. Если тепловой поток направлен от внутренней поверхности, то будет наблюдаться обратная картина. Пока не удастся учесть анали-

тически влияния большинства перечисленных факторов на число Нуссельта, поэтому задача решается экспериментально.

На основании обработки результатов многих экспериментов академик М. А. Михеев составил формулу для определения среднего коэффициента теплоотдачи при вынужденном движении жидкости в трубе

$$\overline{Nu}_f = 0,021 Re_f^{0,80} Pr_f^{0,43} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (X-3)$$

Физические константы жидкости в (X-3) определены при средней по длине температуре t_f (X-2).

Критерий Прандтля Pr_w определяется при температуре стенки. Отношение (Pr_f / Pr_w) учитывает влияние направления теплового потока; в формуле (X-1) аналогичная поправка имела вид $(\mu_f / \mu_w)^{0,14}$.

По формуле (X-3) можно рассчитывать теплоотдачу для гладких труб любой формы поперечного сечения: круглого, квадратного, прямоугольного, треугольного, кольцевого ($d_2/d_1 = 1 \div 5,6$), щелевого ($a/b = 1 \div 40$) и др. и для всех упругих и капельных жидкостей при $1 \cdot 10^4 \leq Re_f \leq 5 \cdot 10^6$ и $0,6 \leq Pr_f \leq 2500$. За определяющий размер в (X-3) принят эквивалентный диаметр, равный

$$d_{эк} = \frac{4F}{P}, \quad (X-4)$$

где F — площадь канала;

P — длина смоченного периметра.

Для воздуха формула (X-3) упрощается

$$Nu_f = 0,018 Re_f^{0,80}. \quad (X-3a)$$

Формулу (X-3) следует применять для труб с отношением $l/d > 50$; для более коротких труб она будет давать заниженные результаты. Однако формулу (X-3) можно применять и для $l/d < 50$, но в этом случае полученный результат следует умножить на величину ϵ_l , значения которой для различных l/d и Re_f даны в табл. X-1.

Таблица X-1

Re_f	l/d								
	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1
$1 \cdot 10^6$	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1

Ламинарный режим. На процесс переноса теплоты при вынужденном ламинарном движении жидкости в трубе влияет свободная конвекция. Наиболее сильное влияние свободная конвекция оказывает при следующих условиях: вектор скорости вынужденного движения жидкости в вертикально расположенной трубе направлен вниз;

жидкость нагревается, при этом у внутренних поверхностей стенки может возникнуть свободная конвекция, что приведет к турбулизации пристенного слоя и, следовательно, к интенсификации теплоотдачи.

Формула для определения среднего по длине коэффициента теплоотдачи при вынужденном ламинарном движении жидкости в трубе, учитывающая влияние свободной конвекции и направление теплового потока, может быть представлена в виде

$$\overline{Nu}_f = 0,17 Re_f^{0,33} Pr_f^{0,43} Gr_f^{0,1} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25}. \quad (X-5)$$

В (X-5) физические константы определяются по средней температуре t_f (X-2); за определяющий размер принят эквивалентный диаметр (X-4); формула (X-5) применима для любой жидкости при $l/d > 50$.

Для коротких труб при $l/d < 50$ коэффициент теплоотдачи, полученный из (X-5), следует умножить на поправочный коэффициент ϵ_l , значения которого даны в табл. X-2.

Таблица X-2

l/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ϵ_l	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1

Зависимость (X-5) для различных значений критерия Грасгофа Gr представлена на рис. X-3 в форме

$$K_0 = f(Re_f, Gr_f),$$

где

$$K_0 = Nu_f \cdot Pr_f^{-0,43} (Pr_f / Pr_w)^{-0,25}. \quad (X-6)$$

Переходный режим. Между верхней границей области ламинарного режима течения в трубах и нижней границей турбулентного существует область переходного режима. Если число Рейнольдса для потока в трубе равно $Re \leq 2 \cdot 10^3$, то установится ламинарный режим, если же $Re \geq 1 \cdot 10^4$, то — турбулентный. Однако даже при малых числах Рейнольдса режим течения может стать турбулентным на большом расстоянии от входа в трубу, например, при $x/d \geq 500$ это происходит уже при $Re \leq 2,6 \cdot 10^3$.

Для переходного режима течения полученные выше формулы применять нельзя. Следует указать на принципиальную неопределенность переходного режима движения жидкости в трубе. Переходный режим движения является неустойчивым и поэтому он весьма чувствителен к самым разнообразным внешним возмущениям. Теплоотдача в переходной области изучена мало и расчетных зависимостей, дающих удовлетворительные результаты, пока не имеется.

На рис. X-3 представлен график, по которому можно определять примерные значения коэффициента теплоотдачи для переходного режима. Из рисунка видно, что при переходном режиме движения жидкости в трубе (в диапазоне $2 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^4$) комплекс K_0 (X-6),

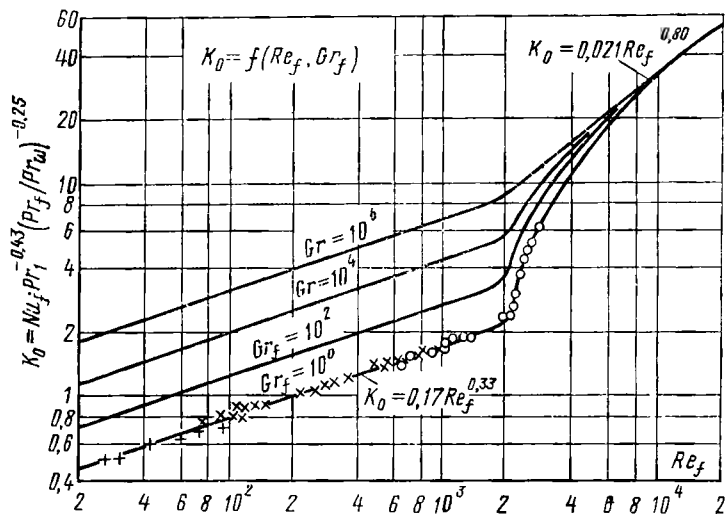


Рис. X-3. Зависимость $K_0 = f(Re_f)$ при различных значениях критериев Грасгофа Gr_f для ламинарного и переходного режимов движения жидкости в трубе [61]

а следовательно, и число Нуссельта Nu_f резко возрастают; нижний предел комплекса K_0 соответствует ламинарному режиму движения жидкости в трубе, а верхний — турбулентному.

§ 2. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ТРУБ

Одиночные трубы. В инженерной практике часто приходится определять теплоотдачу поперечно омываемых труб, так как они являются элементами многих теплообменных устройств. Гидродинамическая обстановка при обтекании трубы оказывается весьма сложной, что, естественно, затрудняет определение теплоотдачи.

Рассмотрим процесс обтекания круглой трубы потоком невязкой жидкости. На рис. X-4 изображена схема обтекания. Проследим за изменением гидродинамических параметров в струйке, которая натекает на трубу в критической точке O и далее огибает цилиндрическую поверхность в направлении к C и B . Скорость в струйке на бесконечном расстоянии от критической точки вверх по потоку обозначим через W_∞ , а давление через p_∞ , местные значения этих величин у поверхности трубы через w и p .

Связь между давлением и скоростью для невязкой жидкости можно представить в форме уравнения Бернулли

$$p + \frac{\rho w^2}{2} = \text{const} \quad \text{и} \quad p - p_\infty = \frac{\rho W_\infty^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{w^2}{W_\infty^2}\right).$$

Безразмерный коэффициент давления p' представим в форме [82]

$$p' = \frac{p - p_\infty}{\rho W_\infty^2 / 2} = 1 - 4 \sin^2 \varphi. \quad (\text{X-7})$$

В критической точке O , $\varphi = 0$ (здесь угол φ определяет место данной точки на цилиндрической поверхности, рис. X-4) скорость $w = 0$, а безразмерное давление $p' = 1$. Вниз по потоку в направлении от O к C или от O к D скорость w в рассматриваемой струйке будет воз-

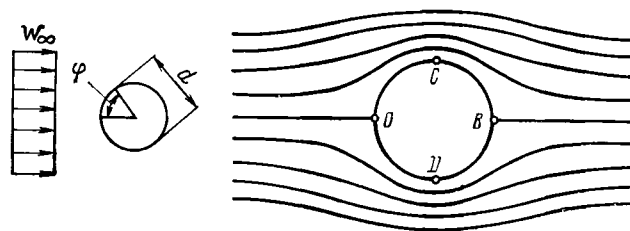


Рис. X-4. Поперечное обтекание невязкой жидкостью цилиндра, неограниченного по длине

растать, а давление p и p' уменьшаться. В точке C ($\varphi = 90^\circ$) скорость w достигнет максимальной величины и будет равна $w = 2W_\infty$; а безразмерный коэффициент давления p' станет отрицательным и равным $p' = -3$. В сечениях струйки вниз по потоку от точки C скорость w начинает уменьшаться вплоть до нуля, а коэффициент давления p' возрастает до плюс единицы в точке B .

Векторная диаграмма изменения безразмерного коэффициента давления p' при обтекании цилиндра невязкой жидкостью представлена на рис. X-5 (пунктирная линия a) [82]. Векторы безразмерных давлений, приложенных в точках O и B , равны между собой и направлены в разные стороны, поэтому сила сопротивления цилиндра в потоке невязкой жидкости равна нулю. Следовательно, для равномерного перемещения поперечно обтекаемого цилиндра в неограниченном пространстве, заполненном невязкой жидкостью, результирующая сила в направлении движения равна нулю. Отмеченный факт для невязкой жидкости распространяется на тела любой формы.

Картина обтекания цилиндра реальной (вязкой) жидкостью резко отличается от описанной выше. При очень малых числах Рейнольдса в набегающем потоке ($Re = W_\infty d / \nu$, d — диаметр цилиндра) разница между картинами обтекания невязкой и вязкой жидкости очень мала. Но она будет проявляться все больше по мере увеличения числа Рейнольдса. При значениях чисел Рейнольдса, характерных для практи-

ческих задач, картину обтекания можно представить следующим образом. На поверхности цилиндра в этих условиях образуется пограничный слой — рис. X-6. В этой области в результате диссипации элементарный объем жидкости частично теряет свою кинетическую энергию

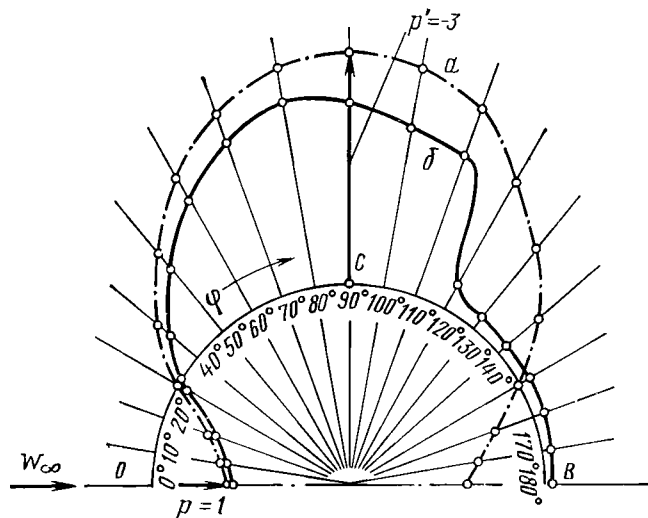


Рис. X-5. Распределение давления по сечению кругового цилиндра диаметром $d=250$ мм при скорости набегающего потока $W_\infty=39$ м/сек:
а) невязкой жидкости; б) вязкой жидкости (воздух)

и оставшегося запаса не хватает для того, чтобы достичь точки В, и он останавливается. Во внешнем потенциальном течении давление восстанавливается по закону Бернулли, так как диссипации энергии не происходит. Это давление распространяется и на всю толщину пограничного слоя. По длине слоя между О и В имеется минимум давления, а от него вниз по потоку существует положительный градиент давления, который приводит к тому, что остановившаяся частица вначале перемещается в пограничном слое в сторону стенки, а затем начинает двигаться обратно. Пограничный слой разбухает и отрывается. Отрыв пограничного слоя резко усложняет гидродинамическую картину обтекания цилиндра, а следовательно, и теплоотдачу.

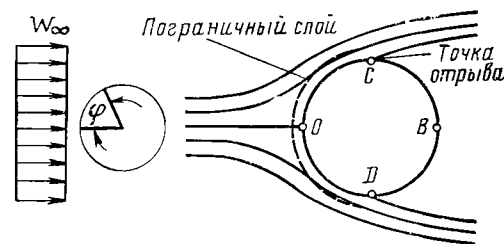


Рис. X-6. Поперечное обтекание вязкой жидкостью цилиндра, неограниченного по длине

Векторная диаграмма при обтекании цилиндра вязкой жидкостью для p' приведена на рис. X-5 (сплошная линия б). Из диаграммы видно, что в этом случае существует сила сопротивления цилиндра. Следовательно, для равномерного перемещения поперечно обтекаемого

цилиндра в вязкой жидкости, результирующая сила в направлении движения не равна нулю, тогда как в невязкой жидкости она равна нулю.

Для ламинарного пограничного слоя отрыв происходит при $\varphi = 82^\circ$, а для турбулентного при $\varphi = 120^\circ$. Естественно, что коэффициент теплоотдачи не остается постоянным по углу φ цилиндра.

На рис. X-7 [107] представлены кривые изменения локального числа Нуссельта для поперечно обтекаемого цилиндра в зависимости от угла φ для различных чисел Рейнольдса в условиях постоянного теплового потока по поверхности. Из рисунка видно, что число Нуссельта уменьшается, начиная от передней критической точки, достигает минимума при некотором угле φ и далее вниз по потоку резко возрастает. В передней критической точке толщина ламинарного пограничного слоя мала и поэтому локальные коэффициенты теплоотдачи и числа Нуссельта велики. По мере удаления от критической точки вниз по потоку растет толщина пограничного слоя, вместе с ней растет его тепловое сопротивление и коэффициент теплоотдачи уменьшается. В зоне отрыва пограничного слоя коэффициент теплоотдачи вновь резко возрастает. В этой области происходят весьма сложные и еще до конца не ясные явления. Здесь, видимо, происходит периодический процесс — утолщения пограничного слоя, его отрыв и унос оторвавшейся массы жидкости вниз по потоку. Этот периодический процесс непрерывно повторяется. Можно ожидать, что чем больше таких процессов происходит в единицу времени, тем интенсивнее теплоотдача, так как в момент отрыва слоя тепловое сопротивление в этой зоне значительно уменьшается. Очевидно, что применить гидродинамическую теорию теплообмена (гл. VII) в этой области невозможно. На интенсивность теплоотдачи в зоне отрыва влияют: число Рейнольдса, форма и качество поверхности (шероховатость) обтекаемого тела, физические константы жидкости.

Различают две формы обтекания.

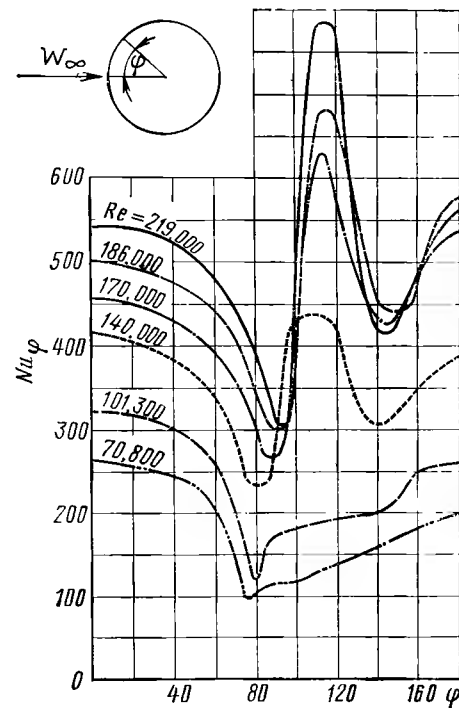


Рис. X-7. Изменение локальных чисел Нуссельта $Nu_\varphi = \frac{\alpha_\varphi d}{\nu}$ на поверхности поперечно обтекаемого длинного цилиндра [107]

Различают две формы обтекания.

Первая осуществляется при числах Рейнольдса $Re \leq 2 \cdot 10^5$ и характеризуется малым углом отрыва φ , равным примерно 82° , и большим сопротивлением цилиндра. При этом течение в пограничном слое остается ламинарным вплоть до точки отрыва и становится турбулентным ниже ее по потоку. При увеличении числа Рейнольдса $Re > 2 \cdot 10^5$ точка перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный смещается вверх по потоку и по мере увеличения числа Рейнольдса проникает в область безотрывного обтекания. В этих условиях на поверхности цилиндра в области безотрывного обтекания наблюдается как ламинарный, так и турбулентный пограничный слой. Первый начинается от передней критической точки, на некотором расстоянии от нее, вниз по потоку переходит во второй, и отрыв происходит уже в области турбулентного пограничного слоя. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса наступает кризис обтекания — точка отрыва при этом смещается вниз по потоку.

Вторая форма обтекания осуществляется при числах Рейнольдса, примерно равных и больших $Re \geq 5 \cdot 10^5$, и характеризуется большим углом отрыва φ (около 120°), расположением точки отрыва в области турбулентного пограничного слоя и малым сопротивлением цилиндра в потоке. Следует отметить, что течение перестраивается постепенно по мере перемещения точки отрыва вверх; положение точки при $\varphi = 120^\circ$ соответствует вполне развитой форме течения.

Первая форма обтекания называется докритической, вторая — надкритической. На рис. X-7 представлены результаты измерений для докритической области, причем большие значения чисел Рейнольдса соответствуют началу кризиса перехода. Можно допустить, что первый минимум числа Нуссельта на рис. X-7 соответствует точке отрыва пограничного слоя.

При расчете теплообменных устройств надо знать среднее по углу φ и по длине поперечно обтекаемой трубы значение коэффициента теплоотдачи.

На основании обработки экспериментальных данных для поперечно обтекаемых цилиндров в воздухе, воде и трансформаторном масле получены следующие формулы [29]:

при $Re_f = 5 \div 1 \cdot 10^3$

$$Nu_f = 0,50 Re_f^{0,5} Pr^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25} \quad (X-8)$$

и при $Re_f = 1 \cdot 10^3 \div 2 \cdot 10^5$

$$Nu_f = 0,25 Re_f^{0,6} Pr_f^{0,38} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (X-9)$$

Приведенные формулы пригодны для докритической формы обтекания цилиндров. Надкритическая область изучена мало и надежных расчетных зависимостей пока не имеется.

Если угол встречи набегающего потока и цилиндра, который называют углом атаки ψ , отличается от 90° , то коэффициент тепло-

отдачи, подсчитанный по формулам (X-8) и (X-9), следует умножить на поправочный коэффициент

$$\varepsilon_\psi = \frac{\alpha_\psi}{\alpha_{\psi=90^\circ}}, \quad (X-10)$$

где α_ψ — коэффициент теплоотдачи при данном угле атаки;
 $\alpha_{\psi=90^\circ}$ — коэффициент теплоотдачи, полученный по формулам (X-8) или (X-9).

График зависимости ε_ψ от угла атаки приведен на рис. X-8.

Влияние степени турбулентности набегающего потока на теплоотдачу поперечно обтекаемого цилиндра изучено еще недостаточно и надежных расчетных зависимостей пока не имеется. Эта проблема в настоящее

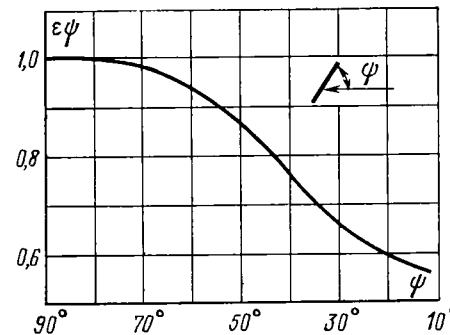


Рис. X-8. Зависимость теплоотдачи цилиндра от угла атаки ψ [61]

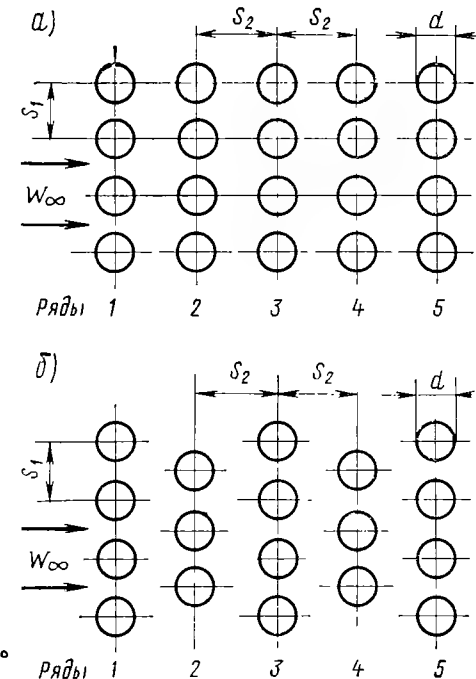


Рис. X-9. Схемы расположения труб в коридорных (а) и шахматных (б) пучках

время интенсивно изучается и есть все основания надеяться, что в самое ближайшее время будут получены конкретные результаты.

Пучки труб. Многие теплообменные устройства представляют собой пучки поперечно омываемых труб. Порядок расположения труб в пучке может быть коридорным (рис. X-9, а) или шахматным (рис. X-9, б). Теплоотдача трубки даже в первом ряду пучка несколько отличается от аналогичного процесса для одиночной трубки, так как будут неодинаковыми картины их обтекания. Трубки, расположенные во втором и третьем ряду, находятся в зоне потока, возмущенного предшествующими рядами, и их теплоотдача зависит от его структуры. Опыты показали, что структура потока, начиная с третьего ряда и далее, остается практически неизменной, поэтому интенсивность теплоотдачи также сохранится постоянной. Теплоотдача первого и

второго рядов трубок по сравнению с третьим рядом меньше. На процесс теплоотдачи пучков оказывают влияние диаметр труб d и их взаимное расположение S_1, S_2 (рис. X-9, а и б).

Исаченко В. П. [32] предложил формулу для определения коэффициента теплоотдачи пучков труб в следующем виде:

$$Nu_f = c Re_f^n Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25} \epsilon_i \epsilon_s \quad (X-11)$$

при

$$Re_f = 10^3 \div 10^5,$$

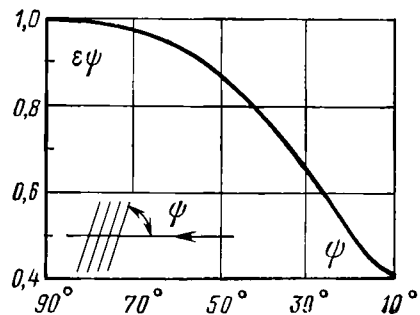


Рис. X-10. Зависимость теплоотдачи в пучках труб от угла атаки ψ [61]

где для шахматных пучков $c = 0,41$ и $n = 0,60$;

для коридорных $c = 0,26$ и $n = 0,65$.

В качестве определяющего размера принят внешний диаметр трубок.

В критерий Рейнольдса входит скорость, которая определяется в самом узком сечении пучка труб. Физические константы определяют по средней температуре жидкости. Критерий Прандтля Pr_w находят при температуре стенки. Поправочный коэффициент ϵ_s учитывает влияние относительного расстояния S_2/d (рис. X-9).

Для глубинных рядов коридорного пучка

$$\epsilon_s = (S_2/d)^{-0,15};$$

для шахматного

при

$$S_1/S_2 < 2 \quad \epsilon_s = (S_1/S_2)^{1/6},$$

при

$$S_1/S_2 \geq 2 \quad \epsilon_s = 1,12.$$

Поправочный коэффициент ϵ_i в (X-11) учитывает номер ряда.

Исследования показали, что при малой турбулентности потока, набегающего на пучок, коэффициент ϵ_i можно принять равным в коридорном пучке для:

первого ряда $\epsilon_1 = 0,6$,
второго ряда $\epsilon_2 = 0,9$,
третьего ряда $\epsilon_3 = 1,0$;

в шахматном пучке соответственно: $\epsilon_1 = 0,6$, $\epsilon_2 = 0,7$, $\epsilon_3 = 1,0$.

Формула (X-11) пригодна, когда угол между направлениями набегающего потока и осями трубок пучка (угол атаки) равен $\psi = 90^\circ$. При других углах атаки следует ввести поправочный коэффициент ϵ_ψ (X-10), величину которого можно найти из графика на рис. X-10.

Наряду с газами и капельными жидкостями в качестве теплоносителей применяют жидкие (расплавленные) металлы, такие, как ртуть, натрий, калий, литий, висмут, галлий, свинец. Достоинством этих теплоносителей является то, что они имеют высокую теплопроводность, малую вязкость, высокую температуру кипения; коррозионное воздействие на материал стенок каналов, по которым они перемещаются, — незначительное. Благодаря высокой теплопроводности жидкие металлы могут очень интенсивно отводить теплоту от поверхности нагрева. Их можно использовать при высоких температурах ($700—800^\circ\text{C}$) и в то же время при низких давлениях. Потери давления при движении жидких металлов в каналах находятся в приемлемых пределах. Многие из них имеют невысокую температуру плавления (для натрия, например, $t_{пл} = 97,5^\circ\text{C}$) и могут без особых трудностей переводиться в жидкое состояние. Все эти качества делают их весьма перспективными теплоносителями. Применение жидких металлов в теплосиловых установках при определенных условиях позволяет повысить их коэффициент полезного действия.

Жидкий металл удовлетворяет многим требованиям, предъявляемым к теплоносителю высокотемпературного атомного реактора. Однако наряду с несомненными достоинствами жидких металлов по сравнению, например с водой, в случае их применения в высокотемпературных атомных реакторах они имеют и существенный недостаток, так как становятся радиоактивными. Это обстоятельство усложняет обслуживание атомных электрических станций.

Несомненные преимущества имеют жидкие металлы перед другими теплоносителями при охлаждении теплонапряженных элементов энергетических установок, таких как камера горения и лопатки газовых турбин и др.

Из всего сказанного следует, что исследование теплоотдачи в жидких металлах имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение. С точки зрения теории жидкие металлы интересны как жидкости с очень малым числом Прандтля $Pr \ll 1$. В таких жидкостях молекулярный перенос теплоты происходит значительно интенсивнее, чем молекулярный перенос количества движения; тепловой пограничный слой толще динамического.

Исследования показали, что закон сопротивления при течении жидких металлов в гладких трубах остается таким же, как и для неметаллических жидкостей. Установлено [10], что закон сопротивления Блазиуса (VII-110), полученный на основании опытов с неметаллическими жидкостями, оказался справедливым и для жидких металлов.

Тепловой поток слабо влияет на гидравлическое сопротивление при течении жидких металлов, так как профиль температуры в потоке слабо зависит от него. Благодаря высокой теплопроводности жидкого металла при движении его в трубе температура в пристенных слоях не может значительно отличаться от температуры в ядре потока и, следовательно, вблизи стенок не могут возникнуть слои с большой (малой) вязкостью по сравнению с ядром потока, не может произойти

искажения профиля скорости, поэтому тепловой поток не оказывает влияния на гидравлическое сопротивление. Все эти явления могут происходить и в неметаллических жидкостях, и там тепловой поток оказывает влияние на гидравлическое сопротивление.

Теплоотдача при течении жидких металлов в трубах. При ламинарном режиме течения в круглых трубах, когда $t_w = \text{const}$, формулы для определения теплоотдачи были получены аналитически в следующем виде [9]:

$$\text{Nu} = 1,61 (\text{Pe } d/l)^{1/3}, \quad (\text{X-12})$$

при $\text{Pe } d/l > 12;$

$$\text{Nu} = 3,66 \quad (\text{X-13})$$

при $\text{Pe } d/l < 12.$

Для турбулентного режима течения при $q_w = \text{const}$ в результате численного решения дифференциального уравнения, описывающего теплоотдачу в трубе при стабилизированном теплообмене, в рамках полуэмпирической теории турбулентного переноса теплоты, была получена следующая формула

$$\text{Nu} = 7 + 0,025 \text{Pe}^{0,8}. \quad (\text{X-14})$$

На основании решения интегральных соотношений для потока жидкого металла в трубе при $q_w = \text{const}$ и подобранном профиле скорости В. М. Боришанский получил формулу

$$\text{Nu} = 7,5 + 0,005 \text{Pe}. \quad (\text{X-15})$$

Сопоставляя формулу (X-15) с экспериментальными данными, ее можно рекомендовать для расчета теплоотдачи при $q_w = \text{const}$, $300 < \text{Pe} < 10\,000$ и $\text{Re} > 10^4$. Однако приведенные формулы не учитывают влияния различных примесей, которые содержатся в жидких металлах, и в первую очередь их окислов. Установлено, что с уменьшением содержания примесей в металлах теплоотдача возрастает. Аналитически учесть влияние содержания примесей и некоторых других факторов на теплоотдачу не удастся. Поэтому расчетные зависимости получены экспериментально [10]. Их можно представить в виде:

при $200 < \text{Pe} < 20\,000;$

$$\text{Nu} = 3,4 + 0,014 \text{Pe}^{0,8} \quad (\text{X-16})$$

$$\text{Nu} = 5 + 0,021 \text{Pe} \quad (\text{X-17})$$

при $100 < \text{Pe} < 20\,000;$
для обеих формул $\text{Re} > 10^4$.

Более подробно с теплоотдачей в жидких металлах можно познакомиться в специальной литературе [10].

ТЕПЛОТДАЧА ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

Интенсивное исследование процессов теплоотдачи при обтекании тел газом с большой скоростью в основном обусловлено развитием авиационной и ракетной техники.

При проектировании высокоскоростных летательных аппаратов возникают две главные проблемы: первая — определение поверхностного трения; вторая — определение температуры обшивки. Сопротивление трения составляет значительную долю полного сопротивления летательного аппарата, поэтому неверный расчет сопротивления трения может привести к значительной ошибке в дальности его полета. Температура обшивки является решающим фактором при проектировании высокоскоростных летательных аппаратов. Обе проблемы обусловлены наличием пограничного слоя на внешней поверхности летательного аппарата. Этот пограничный слой может быть ламинарным и турбулентным. В настоящей главе коротко рассмотрены обе указанные проблемы как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев.

При движении тел с большой скоростью в неподвижном газе или при обтекании неподвижных тел потоками газа с большой скоростью процессы теплообмена значительно усложняются по сравнению с аналогичными процессами при умеренных скоростях. В этих условиях градиенты скорости поперек пограничного слоя становятся очень большими, что приводит к возникновению больших сил трения. Работа сил трения переходит в теплоту, и пограничный слой можно рассматривать как малую пространственную область, в которой происходит выделение теплоты вследствие диссипации энергии.

Тепловые потоки, которые обусловлены работой сил трения, в некоторых случаях достигают очень больших величин. Например, при взаимодействии с воздухом возвращающихся искусственных спутников земли тепловые потоки к их наружной поверхности столь велики, что могут привести к разрушению, если спутник не имеет специальной тепловой защиты.

При взаимодействии тел с потоками большой скорости плотность газа ρ уже нельзя считать величиной постоянной, как это делали при исследовании потоков умеренной скорости.

Способность газа изменять свою плотность при изменении давления называют сжимаемостью. Мерой сжимаемости является отношение динамического напора $\rho w^2/2$ к модулю сжимаемости E . Физический смысл модуля E наиболее наглядно можно представить, рассматривая следующее соотношение:

$$\Delta p = E \frac{\Delta \rho}{\rho},$$

где Δp — приращение давления;
 $\Delta \rho$ — приращение плотности;
 ρ — начальная плотность (до изменения давления).
Откуда

$$E = \rho \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

или более строго

$$E = \rho \frac{dp}{d\rho}.$$

Величина

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (\text{XI-1})$$

представляет собой скорость распространения звука а. Предполагая, что процесс распространения звука происходит адиабатно, дифференцируя уравнение адиабаты, получим

$$p = c \rho^\kappa, \quad \frac{dp}{d\rho} = \kappa c \rho^{\kappa-1} = \kappa \frac{p}{\rho}.$$

С учетом полученного соотношения, выражение (XI-1) примет вид

$$a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T}. \quad (\text{XI-2})$$

Выражение (XI-2) справедливо для идеального газа.

Теперь меру сжимаемости можно выразить следующим образом:

$$\frac{\rho W^2/2}{E} = \frac{\rho W^2/2}{\rho a^2} = \frac{W^2}{2a^2} = \frac{1}{2} M^2, \quad (\text{XI-3})$$

где $M = \frac{W}{a}$ — называют числом Маха: если $M < 1$, поток называют дозвуковым, если $M > 1$ — сверхзвуковым.

Тепловой пограничный слой

При больших скоростях движения газа ($M \gg 1$) вдоль твердого тела на его поверхности возникают гидродинамический и тепловой пограничные слои. В указанных условиях оба слоя оказывают взаимное влияние друг на друга.

В результате действия трения и сжатия температура газа, обтекающего тело, резко возрастает, а это приводит к резкому изменению плотности и вязкости газа, что в свою очередь оказывает влияние на интенсивность переноса теплоты.

Рассмотрим течение газа с большой скоростью вдоль теплоизолированной пластины*.

При обтекании тела сверхзвуковым потоком газа скорость у поверхности равна нулю. Из термодинамики известно, что при адиабатном торможении потока идеального газа его кинетическая энергия переходит в теплоту, — в результате температура газа T_0 возрастает.

При взаимодействии адиабатно заторможенного потока с теплоизолированной пластиной последняя в зависимости от газодинамических параметров потока и физических свойств газа ($\kappa = \frac{c_p}{c_v}$)

в стационарных условиях будет иметь некоторую постоянную температуру T_{aw} . Ниже приведены формулы для определения температур T_0 и T_{aw} .

Температурой заторможенного потока T_0 , или температурой торможения, называют такую, которую имеет газ при его полном адиабатном торможении; например, при натекании на твердое тело, когда скорость потока становится равной нулю, а теплообмен между заторможенным газом и твердым телом не происходит.

При натекании плоского потока на клин с идеально изолированной (для теплообмена) поверхностью в критической точке (точке разворота) возникает температура торможения.

Для определения температуры торможения плоского потока пользуются формулой из термодинамики (13)

$$T_{0, \infty} = T_{\infty} + \frac{W_{x, \infty}^2}{2c_p}, \quad (\text{XI-4})$$

где $T_{0, \infty}$ — температура торможения невозмущенного потока;

T_{∞} — термодинамическая температура невозмущенного потока;

$W_{x, \infty}$ — скорость невозмущенного потока.

Термодинамической температурой потока называют температуру, которую показывает термометр, перемещающийся вместе с потоком и имеющий одинаковую с ним скорость.

Адиабатной температурой стенки T_{aw} , или температурой восстановления T_r , называют температуру идеально изолированной, неизлучающей твердой поверхности, обтекаемой потоком жидкости с внутренними источниками теплоты или с выделением теплоты вследствие диссипации энергии (74). Установлено, что для газов, если $Pg < 1$, адиабатная температура стенки T_{aw} меньше температуры торможения $T_{0, \infty}$. На рис. XI-1 изображено распределение температуры в тепловом пограничном слое на тепло-

* При взаимодействии тела со сверхзвуковым потоком газа перед ним возникает головная ударная волна; при прохождении сквозь поверхность ударной волны происходит скачкообразное изменение газодинамических параметров; это явление будет рассмотрено в § 9 гл. XI.

изолированной пластине. Безразмерное число, определяемое тождеством

$$r \equiv \frac{T_{aw} - T_{\infty}}{T_{0, \infty} - T_{\infty}} = \frac{T_r - T_{\infty}}{W_{\infty}^2 / 2c_p}, \quad (XI-5)$$

называют коэффициентом восстановления.

Тепловой поток к твердому телу, омываемому газом высокой скорости, определяют по следующей формуле:

$$q_w = \alpha (T_{aw} - T_w). \quad (XI-6)$$

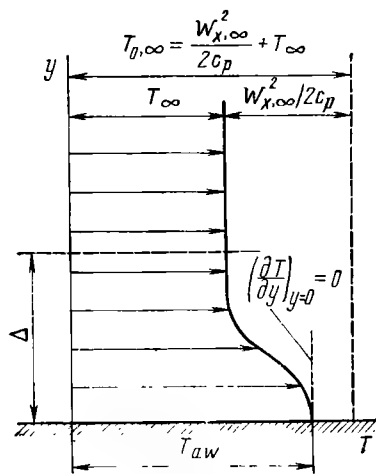


Рис. XI-1. Распределение температуры в тепловом пограничном слое (толщиной Δ) сжимаемой жидкости при продольном обтекании теплоизолированной пластины высокоскоростным потоком газа

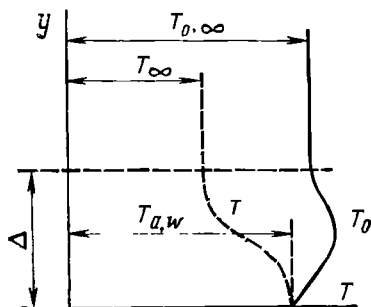


Рис. XI-2. Распределение термодинамической температуры и температуры торможения в пристеночной области при продольном обтекании теплоизолированной пластины высокоскоростным потоком сжимаемой жидкости

Коэффициент восстановления r (XI-5) является функцией числа Прандтля и для ламинарных пограничных слоев хорошо аппроксимируется уравнением

$$r = \sqrt{\text{Pr}} \quad (XI-7)$$

в диапазоне чисел Прандтля от 0,5 до 5.

Для турбулентных пограничных слоев принимают

$$r_{\text{тб}} = \sqrt[3]{\text{Pr}}. \quad (XI-8)$$

Если тело, находящееся в потоке газа, не изолировано, то температура стенки может принимать любые значения в зависимости от направления теплового потока в твердом теле. Например, в случае отвода теплоты от поверхности внутрь тела температура поверхности T_w может стать меньше адиабатной температуры стенки T_{aw} , в случае подвода теплоты изнутри тела к его поверхности температура

T_w может стать больше адиабатной температуры стенки T_{aw} . Представим уравнение (XI-5) в другой форме; из (XI-2) следует

$$a^2 = \kappa R T,$$

откуда

$$T_{\infty} = \frac{a_{\infty}^2}{\kappa R}. \quad (XI-9)$$

Из уравнения Майера [13, 17]

$$c_p - c_v = R,$$

с учетом $\kappa = c_p / c_v$ получим

$$\frac{1}{c_p} = \frac{\kappa - 1}{\kappa R}. \quad (XI-10)$$

Подставим значение T_{∞} из (XI-9) в (XI-4) и, учитывая последнее соотношение, получим зависимость температуры торможения от числа Маха, важную для дальнейших исследований

$$T_{0, \infty} = T_{\infty} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{\infty}^2 \right). \quad (XI-11)$$

Сопоставляя (XI-5) и (XI-11), получим формулу для температуры восстановления в виде

$$T_{r, \infty} = T_{\infty} \left(1 + r \frac{\kappa - 1}{2} M_{\infty}^2 \right). \quad (XI-12)$$

При расчетах используют также температуру торможения в пограничном слое, которая по аналогии с (XI-4) может быть представлена в виде

$$T_0 = T + \frac{w_x^2}{2c_p}, \quad (XI-13)$$

где T — термодинамическая температура газа в пограничном слое.

Иногда пользуются понятием температуры восстановления в пограничном слое, которая по аналогии с (XI-4) может быть представлена в виде

$$T_r = T + r \frac{w_x^2}{2c_p}. \quad (XI-14)$$

На рис. XI-2 изображено распределение термодинамической температуры и температуры торможения в пристеночной области теплоизолированной пластины.

Уравнение энергии

Для исследования теплоотдачи при взаимодействии твердых тел с потоками газа большой скорости целесообразно использовать уравнение энергии (II-51), в котором вместо внутренней энергии u ($Du = c_v DT$) используется другая функция состояния — энтальпия h ($Dh = c_p DT$).

Введем в уравнение энергии (II-51) вместо внутренней энергии u энтальпию h . По определению, которое дается в термодинамике, энтальпия равна

$$Dh = Du + D\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

или

$$c_p DT = c_v DT + D\left(\frac{p}{\rho}\right),$$

откуда

$$c_v DT = C_p DT - D\left(\frac{p}{\rho}\right). \quad (a)$$

Подставим в уравнение энергии (II-51) вместо $c_v DT$ его значение из (a); после подстановки левая часть (II-51) примет вид

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} - \rho \frac{D}{D\tau} \left(\frac{p}{\rho}\right), \quad (б)$$

где

$$\frac{D}{D\tau} \left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{D\tau} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{D\tau}. \quad (в)$$

В правую часть уравнения (II-51) вместо дивергенции скорости подставим ее значение, которое найдем по уравнению сплошности

$$\nabla w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{D\tau}. \quad (г)$$

После указанных подстановок с учетом (a), (б), (в) и (г) уравнение энергии имеет вид

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \frac{Dp}{D\tau} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \mu \Phi. \quad (XI-15)$$

Для стационарного плоского потока уравнение (XI-15) примет вид

$$\begin{aligned} \rho w_x c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= w_x \frac{\partial p}{\partial x} + w_y \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \mu \Phi. \end{aligned} \quad (XI-16)$$

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для исследования процессов теплоотдачи в потоке газа высокой скорости, так же как и при умеренных скоростях, используются методы теории пограничного слоя (гл. VII).

Система уравнений плоского (двумерного) сжимаемого пограничного слоя (плотность ρ — переменная величина) выводится так же,

как и для несжимаемого ($\rho = \text{const}$) (VII-10) и (VII-31б). На основании анализа порядка величин из уравнений (II-25 и II-26) и энергии (XI-16) получены следующие уравнения сжимаемого пограничного слоя: уравнения движения в проекции на ось x

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right); \quad (XI-17)$$

в проекции на ось y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Для сжимаемого двумерного пограничного слоя уравнение сплошности имеет вид

$$\frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y} = 0; \quad (XI-18)$$

уравнение энергии

$$\rho w_x c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial T}{\partial y} = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2. \quad (XI-19)$$

К системе уравнений пограничного слоя необходимо присоединить уравнение состояния; для идеального газа оно имеет вид (II-37)

$$p = \rho RT.$$

Теплоемкость c , коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ зависят от температуры, поэтому должны быть известны следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} c &= c(T), \\ \mu &= \mu(T), \\ \lambda &= \lambda(T). \end{aligned} \right\} \quad (XI-20)$$

Присоединяя к системе уравнений (XI-17, XI-18, XI-19, XI-20) и (II-37) граничные условия для w_x , w_y , T , получим замкнутую систему из восьми уравнений с восемью неизвестными.

Отметим еще одну важную особенность потока, имеющего большую скорость: в уравнение энергии пограничного слоя (XI-19) обязательно должна входить абсолютная температура T , а не разность температур θ , как это было для потока умеренной скорости (см., например, VII-31б), так как плотность ρ и физические константы μ , λ , c зависят от абсолютного значения температуры.

Для дальнейших исследований нам понадобится уравнение энергии пограничного слоя в другой по сравнению с (XI-19) форме. Чтобы получить его, умножим уравнение (XI-17) на скорость w_x и сложим результат с уравнением (XI-19)

$$\begin{aligned} \rho w_x c_p \frac{\partial}{\partial x} \left(T + \frac{w_x^2}{2c_p} \right) + \rho w_y c_p \frac{\partial}{\partial y} \left(T + \frac{w_x^2}{2c_p} \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu w_x \frac{\partial w_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (XI-21)$$

Полученное уравнение написано для параметров пограничного слоя, а величина в скобках в левой его части представляет собой температуру торможения в пограничном слое (см. уравнение XI-13).

Учитывая $\lambda = \frac{\mu c_p}{Pr}$ и соотношение (XI-13) и пренебрегая зависимостью числа Прандтля от температуры, представим уравнение (XI-21) в виде

$$\rho \omega_x \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho \omega_y \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) + \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \times \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\omega_x}{c_p} \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right). \quad (XI-22)$$

Для случая $Pr = 1$ получим

$$\rho \omega_x \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho \omega_y \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial y} \right). \quad (XI-23)$$

Исследования показали, что при допущении $Pr = 1$ в любой точке на изолированной поверхности тела, омываемого потоком газа высокой скорости, возникает температура торможения T_0 (XI-13), а не температура восстановления T_r (XI-14), как это должно было бы быть в реальных условиях для $Pr \neq 1$. Таким образом, допущение $Pr = 1$ значительно упрощает физическую обстановку в пограничном слое, а следовательно, и уравнение (XI-23), описывающее эту обстановку.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство: уравнение энергии (XI-23) для потока высокой скорости можно получить из уравнения энергии для потока умеренной скорости (VII-36), если в последнем заменить избыточную температуру ϑ на абсолютную температуру торможения T_0 . Очевидно, этот факт имеет большое значение в том смысле, что результаты решения уравнения энергии для потоков умеренных скоростей можно распространить на случай потоков большой скорости, если на всех этапах решения заменить температуру ϑ на T_0 .

Частное решение уравнения энергии пограничного слоя при $Pr = 1$

Для уравнения энергии (XI-23) найдено частное решение [102] в форме

$$T_0 = T + \frac{\omega_x^2}{2c_p} = \text{const.} \quad (XI-24)$$

Уравнение энергии (XI-23) удовлетворяется, если температура торможения поперек пограничного слоя не изменяется. Из условия равенства температуры на внешней кромке пограничного слоя и температуры потенциального потока находят постоянную в (XI-24)

$$T_0 = T + \frac{\omega_x^2}{2c_p} = T_{0,\infty}. \quad (XI-25)$$

По толщине пограничного слоя скорость ω_x уменьшается от скорости потенциального потока W_x на внешней кромке пограничного слоя до нуля на стенке ($\omega_x|_{y=0} = 0$), при этом термодинамическая температура T возрастает (XI-24) и у изолированной (для теплообмена) стенки становится равной адиабатной температуре стенки T_{aw} .

Следовательно, когда $Pr = 1$, температура стенки равна

$$T_w = T_{aw} = T_{0,\infty}. \quad (XI-26)$$

По закону Фурье тепловой поток, обусловленный теплопроводностью, пропорционален градиенту термодинамической температуры. В ламинарном высокоскоростном пограничном слое его можно найти, используя уравнение (1-3) и (XI-25)

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\omega_x}{c_p} \frac{\partial \omega_x}{\partial y}. \quad (XI-27)$$

Из (XI-27) следует, что тепловой поток у стенки ($y = 0$) равен нулю потому, что здесь $\omega_x = 0$; при $0 < y < \delta$ тепловой поток не равен нулю и направлен к внешней кромке пограничного слоя, так как во всех случаях $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} > 0$.

Частное решение уравнения энергии (XI-25) дает возможность провести некоторый анализ физической обстановки, которая складывается в высокоскоростном ламинарном пограничном слое. Однако сведений, которые содержатся в решении (XI-25), недостаточно для определения теплового потока q (XI-27), так как конкретное распределение температуры T и скорости ω_x по y неизвестны. Отметим, что решение (XI-25) остается справедливым при любом значении градиента давления $\partial p / \partial x$.

Частное решение уравнений пограничного слоя при $Pr = 1$, $\partial p / \partial x = 0$

Установлено, что уравнения движения (XI-17) при $\partial p / \partial x = 0$ и энергии (XI-23) удовлетворяются, если температура торможения T_0 и скорость ω_x связаны линейно

$$T_0 \equiv T + \frac{\omega_x^2}{2c_p} = A\omega_x + B, \quad (XI-28)$$

где A и B — постоянные, которые определяют, используя граничные условия [102].

Так как температура и скорость связаны линейно и $Pr = 1$, то толщина динамического δ и теплового Δ слоев будет одинакова. Определим постоянные в уравнении (XI-28). Если температура на внешней кромке пограничного слоя равна температуре потенциального потока (см. рис. XI-2), тогда $T_0 = T_{0,\infty}$ при $\omega_x = W_{x,\infty}$ и $T_0 = T_w$ при $\omega_x = 0$.

Используя граничные условия из (XI-28), найдем

$$A = \frac{T_{0,\infty} - T_w}{W_{x,\infty}}$$

и

$$B = T_w.$$

Подставляя значения A и B в (XI-28), получим

$$\frac{w_x}{W_{x,\infty}} = \frac{T_0 - T_w}{T_{0,\infty} - T_w}. \quad (XI-29)$$

Учитывая (XI-9), представим (XI-10) в виде

$$\frac{1}{c_p} = \frac{\kappa - 1}{\kappa R} \cdot \frac{T_\infty}{T_\infty} = \frac{\kappa - 1}{a_\infty^2} T_\infty.$$

Вспомня, что

$$a_\infty^2 = \frac{w_{x,\infty}^2}{M_\infty^2},$$

перепишем последнее соотношение в виде

$$\frac{1}{c_p} = M_\infty^2 \frac{\kappa - 1}{W_{x,\infty}^2} T_\infty. \quad (XI-30)$$

Сопоставляя (XI-28), (XI-29) и (XI-30), найдем зависимость между T и w_x

$$\frac{T}{T_\infty} = \frac{T_w}{T_\infty} - \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right) \frac{w_x}{W_{x,\infty}} + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \frac{w_x}{W_{x,\infty}} \left(1 - \frac{w_x}{W_{x,\infty}} \right). \quad (XI-31)$$

Учитывая (XI-11), можно представить (XI-31) в другой форме

$$T - T_\infty = (T_{0,\infty} - T_w) \frac{w_x}{W_{x,\infty}} - \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 T_\infty \left(\frac{w_x}{W_{x,\infty}} \right)^2. \quad (XI-32)$$

Теплоотдача при $Pr = 1$, $\partial p / \partial x = 0$

Дифференцируя (XI-31) по y и подставляя результат в уравнение Фурье (I-3), получим выражение для теплового потока в виде

$$q = \frac{\lambda T_\infty}{W_{x,\infty}} \left[\left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right) - \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right] \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_w, \quad (XI-33)$$

где индекс « w » относится к условиям на поверхности пластины.

Анализируя выражение (XI-27), установили, что для случая изолированной пластины тепловой поток направлен к наружной кромке пограничного слоя. Однако на практике весьма часто встречаются случаи неизолированных (для теплообмена) пластин.

Анализируя выражение (XI-33), можно найти условия, которые определяют направление теплового потока q . Природа пограничного слоя такова, что всегда соблюдаются условия $\partial w_x / \partial y > 0$, поэтому алгебраический знак для q зависит от знака квадратной скобки (XI-33).

Если

$$\left(\frac{\kappa - 1}{2} \right) M_\infty^2 > \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right), \quad (XI-34)$$

то q имеет знак минус, и тепловой поток направлен от жидкости к стенке; при условии (XI-34) пластину называют холодной (рис. XI-3).

Если

$$\left(\frac{\kappa - 1}{2} \right) M_\infty^2 < \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right), \quad (XI-35)$$

то q будет иметь знак плюс, и тепловой поток направлен от стенки к жидкости; при условии (XI-35) пластину называют горячей (рис. XI-3).

Если

$$\left(\frac{\kappa - 1}{2} \right) M_\infty^2 = \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right), \quad (XI-36)$$

то теплообмена между потоком жидкости и стенкой нет, и температура стенки T_w равна адиабатной температуре стенки T_{aw} .

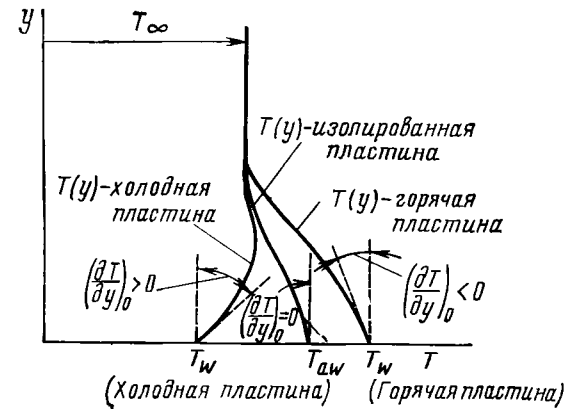


Рис. XI-3. Распределение температуры в тепловом пограничном слое на теплоизолированной, холодной и горячей пластинах при продольном обтекании высокоскоростным потоком сжимаемой жидкости

Аналогия Рейнольдса

Ранее в гл. VII, § 6 обсуждалась гипотеза О. Рейнольдса об аналогии между процессами переноса количества движения и теплоты в потоке несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), на основании которой выведены формулы для определения коэффициента теплоотдачи. Выясним, сохраняется ли аналогия Рейнольдса в высокоскоростном пограничном слое сжимаемого газа (при переменной плотности ρ).

Используя (I-3) и (XI-32), найдем выражение для теплового потока

$$q_w = \frac{\lambda}{W_{x,\infty}} \frac{\partial w_x}{\partial y} \left[T_w - T_{0,\infty} + (\kappa - 1) M_\infty^2 T_\infty \frac{w_x}{W_{x,\infty}} \right]. \quad (XI-37)$$

Исключим $\frac{\partial w_x}{\partial y}$ из (XI-37) на основании равенства $\tau = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y}$.

В результате получим

$$q = \frac{c_p}{Pr} \frac{\tau}{W_{x,\infty}} \left[T_w - T_{0,\infty} + (\kappa - 1) M_\infty^2 T_\infty \frac{w_x}{W_{x,\infty}} \right]. \quad (XI-38)$$

На основании (XI-38) при $w_x = 0$ тепловой поток у стенки равен

$$q_w = c_p \frac{\tau_w}{W_{x,\infty}} (T_w - T_{0,\infty}) = c_p \frac{\tau_w}{W_{x,\infty}} (T_w - T_{aw}); \quad (XI-39)$$

вторая часть уравнения (XI-39) написана на основании

$$T_{0,\infty} = T_{aw} \text{ при } Pr = 1.$$

По определению коэффициента трения c_f (VII-25) для условий свободного потока можно представить в виде

$$c_{f,\infty} \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty W_{x,\infty}^2}. \quad (XI-40)$$

Из (XI-39) коэффициент теплоотдачи α равен

$$\alpha = \frac{q_w}{T_w - T_{aw}} = \frac{c_p \tau_w}{W_{x,\infty}}.$$

Подставим в полученное соотношение значение τ_w из (XI-40). В результате получим

$$\alpha = \frac{1}{2} c_p c_{f,\infty} \rho_\infty W_{x,\infty}, \quad (XI-41)$$

а с учетом (VII-47) последнее выражение можно представить в виде

$$St_\infty = \frac{1}{2} c_{f,\infty}. \quad (XI-42)$$

Полученное соотношение (XI-42) представляет собой математическое описание аналогии Рейнольдса. Ранее аналогичная зависимость была получена для несжимаемой жидкости (VII-58). На основании (XI-42) можно утверждать, что аналогия Рейнольдса сохраняется в ламинарном пограничном слое и для сжимаемой жидкости, по крайней мере при $Pr = 1$.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим результаты решения системы уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя (XI-17, XI-18 и XI-19) и уравнения состояния (II-37) для продольного обтекания пластины ($dp/dx = 0$) при $Pr = 1$ и зависимости вязкости от температуры в форме $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^n$. Величина n в рассматриваемом решении взята из эксперимента для воздуха и равна $n = 0,76$. Если принять $n = 1$, то искомое решение представляет собой известное решение Блазиуса для системы уравнений несжимаемого ламинарного пограничного слоя (VII-10), которое имеет вид $c_f \sqrt{Re} = 0,664$ (VII-27).

Ознакомление с результатами решения названной системы уравнений помогает понять сущность сложных процессов, происходящих в высокоскоростном сжимаемом пограничном слое. Кроме того, результаты решения имеют практическую ценность, так как удовлетворительно подтверждаются непосредственными измерениями.

Обсудим результаты этого решения. На рис. XI-4, а и XI-4, б приведены распределения температуры T/T_∞ и скорости $w_x/W_{x,\infty}$ по толщине ламинарного пограничного слоя [координата $(y/x) \sqrt{Re}$] на изолированной пластине. Отметим прежде всего, что сжимаемость, выраженная через число Маха M (XI-3), резко влияет на физическую обстановку в пограничном слое. Температура у стенки быстро возрастает с увеличением числа M (рис. XI-4, а). Отношение температур T/T_∞ на внешней границе пограничного слоя, равное $T/T_\infty = 1$, возрастает в результате возникновения теплоты в пограничном слое и достигает максимального значения у стенки при $y=0$. Для случая $Pr=1$, а значит и $r=1$ (XI-7) отношение температур T/T_∞ у стенки равно $T/T_\infty = T_w/T_\infty$, поэтому отношение T_w/T_∞ можно определить по формуле

$$T_w/T_\infty = 1 + (\kappa - 1) \frac{1}{2} M_\infty^2. \quad (XI-43)$$

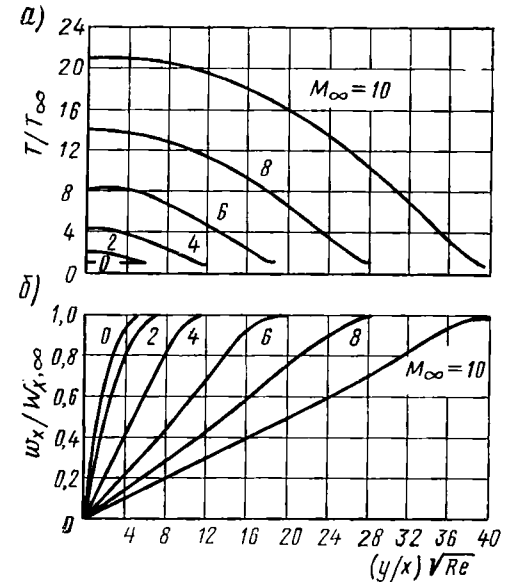


Рис. XI-4. Распределение температуры (а) и скорости (б) на теплоизолированной пластине для $Pr=1$, $n=0,76$ [102]

Из этого выражения видно, как влияет сжимаемость ($\frac{1}{2} M_\infty^2$, XI-3) на температуру стенки.

Для несжимаемой жидкости в случае умеренных скоростей принимают $M_\infty = 0$, а теплотой, возникающей внутри пограничного слоя, пренебрегают и, если T/T_∞ на внешней границе пограничного слоя равно единице, то это отношение остается неизменным до поверхности

изолированной стенки (см. рис. XI-4, а, $M_\infty = 0$).

Анализируя график распределения скоростей (рис. XI-4, б), можно сделать два важных заключения. Первое — толщина пограничного слоя при $M_\infty = 10$ по сравнению с несжимаемым потоком $M_\infty = 0$ возрастает примерно в пять раз. Второе — распределение скорости ($w_x/W_{x,\infty}$) по толщине пограничного слоя (координата $y/x\sqrt{Re_\infty}$), начиная с $M_\infty \geq 5$, становится практически линейным — это важное обстоятельство будет использовано позднее в решении интегральных соотношений для пограничного слоя в потоке высокой скорости.

На рис. XI-5, а и XI-5, б представлены распределения температуры и скорости в пограничном слое для случая, когда стенка холодная (см. рис. XI-3), т. е. она охлаждается и ее температура поддерживается на уровне $T_w/T_\infty = 1/4$. Естественно, что при этом максимальная температура в пограничном слое по сравнению со случаем изолированной пластины уменьшается, но все же она (T) примерно в шесть раз превышает температуру невозмущенного потока (T_∞), которая в рассматриваемом случае принимается равной температуре на внешней границе пограничного слоя. Толщина пограничного слоя для $M_\infty = 10$ уменьшается почти в 2,5 раза по сравнению с толщиной пограничного слоя в случае $T_w/T_\infty = 1$ (см. рис. XI-4, б).

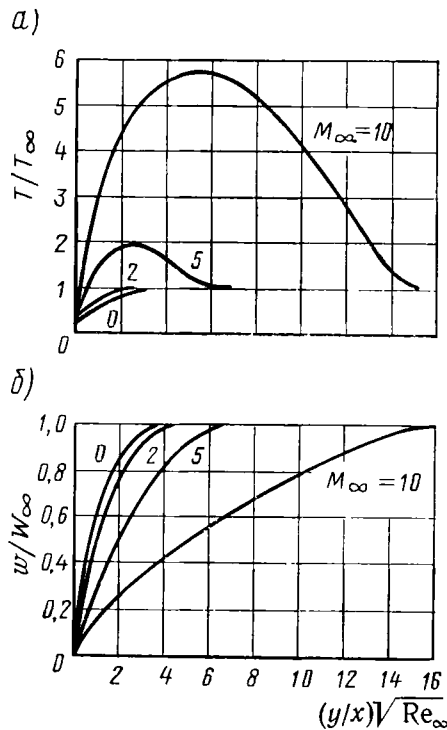


Рис. XI-5. Распределение температуры (а) и скорости (б) на пластине при $T_w/T_\infty = 1/4$, $Pr=1$, $n=0,76$ [102]

температуры стенки.

На рис. XI-6 показана зависимость коэффициента трения от числа Маха. Для числа $M = 0$, что соответствует умеренным дозвуковым скоростям, в соответствии с формулой (VII-27) получим

$$2c_{f,\infty} \sqrt{Re_\infty} = 1,328.$$

Эта величина и отложена на оси ординат (рис. XI-6) при $M = 0$ для изолированной пластины. При увеличении числа Маха, как видно из графика, коэффициент трения незначительно уменьшается. Аналогичный характер имеет зависимость коэффициента трения от числа Маха для холодной пластины ($T_w/T_\infty = 1/4$).

Анализируя графики, показанные на рис. XI-6, можно сделать следующие выводы: влияние числа Маха в обоих случаях невелико; охлаждение пластины приводит к некоторому увеличению коэффициента трения c_f , а следовательно, коэффициента теплоотдачи α .

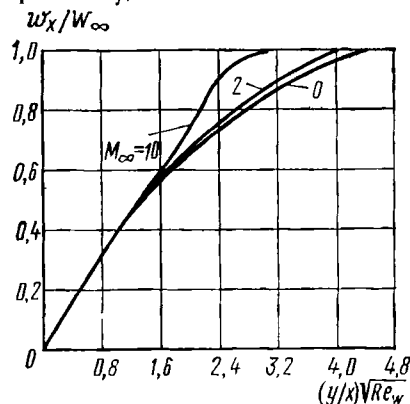


Рис. XI-7. Профили скорости в пограничном слое сжимаемой жидкости на теплоизолированной продольно-обтекаемой пластине при $Pr=1$, $n=0,76$, в качестве определяющей взята температура стенки T_w [102]

скорости меньше зависят от числа M_∞ , чем соответствующие, изображенные на рис. XI-4, б. Во внутренней половине пограничного слоя

* Определяющей температурой называют ту, по которой находят физические константы жидкости μ , λ , c и т. п.

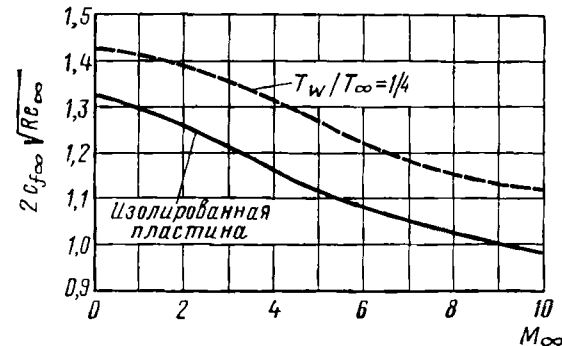


Рис. XI-6. Зависимость локального коэффициента $c_{f,\infty}$ от числа Маха M_∞ набегающего потока для $Pr=1$, $n=0,76$ [102]

Выбор определяющей температуры

На рис. XI-4, XI-5 и XI-6 изображены результаты решения системы уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя для случая, при котором в качестве определяющей температуры* выбрана температура невозмущенного потока.

Показано, что если в качестве определяющей температуры выбрать температуру стенки T_w вместо T_∞ , то влияние числа M_∞ , например, на профили скорости, уменьшится. На рис. XI-7 изображены профили скорости для тех же условий, что и на рис. XI-4, б, но преобразованные для температуры стенки T_w . Из рисунка видно, что профили

профиль скорости вообще не зависит от числа M_∞ . Это важное обстоятельство наводит на мысль о том, что можно подобрать определяющую температуру так, что число M_∞ не будет существенно влиять на коэффициенты трения и теплоотдачи. Следовательно, для расчета сжимаемого пограничного слоя можно использовать методы, разработанные для несжимаемого, если в качестве определяющей взять соответствующим образом подобранную температуру. Один из таких методов будет рассмотрен в § 4 настоящей главы.

Влияние числа Прандтля Pr на физическую обстановку в сжимаемом ламинарном пограничном слое на пластине

Выше были рассмотрены результаты решения системы уравнений пограничного слоя при $Pr = 1$. Решения при таком допущении представляют интерес потому, что число Прандтля для воздуха близко к единице. Кроме того, уравнения пограничного слоя при $Pr = 1$ значительно упрощаются (сравним, например, XI-22 и XI-23) и в ряде случаев могут быть проинтегрированы. Известно, что при $Pr = 1$ толщина динамического и теплового пограничных слоев одинакова (гл. VII).

Сопоставляя (VII-8) и (VII-34), найдем

$$\frac{\Delta}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}, \quad (XI-44)$$

откуда следует, что при числе Прандтля $Pr < 1$ температурный пограничный слой толще динамического.

Установлено, что с увеличением числа Pr толщина динамического пограничного слоя увеличивается, а теплового уменьшается. Однако влияние числа Pr (при умеренных величинах Pr для газов) на профиль скорости невелико, если при его построении в качестве определяющей температуры использовалась температура стенки T_w . Установлено, что влияние числа Pr (при умеренных величинах Pr для газов) на коэффициент трения c_f также невелико.

§ 3. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО СЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим способы решения интегральных уравнений для сжимаемого пограничного слоя.

Интегральное уравнение для случая обтекания пластины ($dp/dx = 0$) сжимаемым потоком можно написать на основании (VII-13), учитывая, что плотность ρ — величина переменная.

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho \omega_x (W_{x,\infty} - w_x) dy = \tau_w. \quad (XI-45)$$

Для решения этого уравнения необходимо иметь распределение скорости, так же как при решении аналогичного уравнения для не-

сжимаемого пограничного слоя (VII-13), и, кроме того, распределение плотности по толщине пограничного слоя. Для теплоизолированной пластины распределение скорости принимаем линейным, что дает хорошее совпадение для случаев $M_\infty \geq 5$ (см. рис. XI-4, б)

$$w_x = W_{x,\infty} (y/\delta). \quad (XI-46)$$

Распределение плотности найдем на основании следующих рассуждений: из (XI-24) следует

$$\frac{w_x^2}{2} + c_p T = \frac{W_{x,\infty}^2}{2} + c_p T_\infty. \quad (XI-47)$$

Сопоставляя (XI-9), написанное для условий внутри пограничного слоя, и (XI-10), получим

$$c_p T = \frac{a^2}{\kappa - 1}. \quad (XI-48)$$

Подставим (XI-48) в (XI-47)

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{W_{x,\infty}^2 - w_x^2}{a_\infty^2} \right). \quad (XI-49)$$

Из (XI-17) следует, что давление по толщине пограничного слоя постоянно, или статическое давление в любой точке пограничного слоя p будет равно статическому давлению сразу за пределами пограничного слоя p_∞ , поэтому на основании уравнения состояния (II-37) получим

$$\rho = \rho_\infty \frac{T_\infty}{T}. \quad (XI-50)$$

Подставим (XI-49) в (XI-50). В результате получим

$$\rho = \frac{\rho_\infty}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{W_{x,\infty}^2 - w_x^2}{a_\infty^2} \right)}. \quad (XI-51)$$

Полученное распределение скорости (XI-46) и плотности (XI-51) подставим в интегральное уравнение (XI-45)

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{\rho_\infty}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{W_{x,\infty}^2 - W_{x,\infty}^2 (y/\delta)^2}{a_\infty^2} \right)} W_{x,\infty}^2 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) dy = \tau_w. \quad (XI-52)$$

С учетом обозначения

$$\xi = \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2$$

интегральное соотношение (XI-52) можно привести к виду

$$\rho_{\infty} W_{x, \infty}^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{1-y/\delta}{1+\xi-\xi(y/\delta)^2} dy = \tau_w, \quad (XI-53)$$

а с учетом обозначений

$$\xi = 1 + K \quad \text{и} \quad K = -\frac{\xi}{\xi}$$

интегральное соотношение (XI-53) можно привести к виду

$$\frac{\rho_{\infty} W_{x, \infty}^2}{\xi} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{1}{1+K\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \left(\frac{y}{\delta}\right) dy = \tau_w. \quad (XI-54)$$

В результате интегрирования (XI-54) получим

$$\rho_{\infty} W_{x, \infty}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma \delta}{\xi} \right) = \tau_w, \quad (XI-55)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{2K} \ln(1+K) - \frac{1}{K} + \frac{1}{2K\sqrt{-K}} \ln \frac{1+\sqrt{-K}}{1-\sqrt{-K}}. \quad (XI-56)$$

Касательное напряжение у стенки равно

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_w. \quad (XI-57)$$

Коэффициент вязкости при температуре стенки найдем на основании степенного закона вязкости*

$$\frac{\mu_w}{\mu_{\infty}} = \left(\frac{T_w}{T_{\infty}} \right)^{0.5}. \quad (XI-58)$$

Подставляя (XI-49) в (XI-58), получим

$$\mu_w = \mu_{\infty} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{\infty}^2 \right)^{0.5}. \quad (XI-59)$$

Градиент скорости у стенки для линейного профиля найдем, дифференцируя (XI-46)

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_w = \frac{W_{x, \infty}}{\delta}. \quad (XI-60)$$

Подставляя (XI-59) и (XI-60) в (XI-57), получим правую часть уравнения (XI-55) в виде

$$\tau_w = \frac{\mu_{\infty} W_{x, \infty} \xi^{0.5}}{\delta}. \quad (XI-61)$$

* Здесь для простоты применен закон вязкости в форме (XI-58) вместо более точного закона Сатерленда (I-19).

С учетом (XI-61) уравнение (XI-55) после дифференцирования примет вид

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{v_{\infty} \xi^{3/2}}{W_{x, \infty} \Gamma}. \quad (XI-62)$$

Интегрируя (XI-62), получим формулу для определения толщины пограничного слоя в потоке газа высокой скорости

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{2}{\Gamma}} \xi^{3/4}, \quad (XI-63)$$

где x — расстояние от передней кромки пластины;

$Re = \frac{W_{x, \infty} x}{v_{\infty}}$ — число Рейнольдса.

В уравнении (XI-61) заменим касательные напряжения τ_w через местный коэффициент трения (VII-25), а вместо толщины пограничного слоя δ введем ее значение из (XI-63)

$$c_f = \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\sqrt{8\Gamma}}{2} \xi^{-0.25}. \quad (XI-64)$$

Среднее значение коэффициента трения (гл. VII, § 2) равно

$$C_f = 2c_f = \frac{\sqrt{8\Gamma}}{\sqrt{Re}} \xi^{-0.25}, \quad (XI-65)$$

а среднее число Стентона

$$\overline{St} = \frac{C_f}{2} = \frac{\sqrt{8\Gamma}}{2\sqrt{Re}} \xi^{-0.25}. \quad (XI-66)$$

Уравнение (XI-66) было получено Карманом. Оно полезно в практических и методических целях, так как наглядно показывает особенности расчета сжимаемого пограничного слоя и сущность различия между несжимаемым и сжимаемым пограничными слоями.

§ 4. УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНИЯ C_f И ТЕПЛОТДАЧИ α В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ И ПЕРЕМЕННОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ ГАЗА

Для определения коэффициента теплоотдачи α в потоках умеренной дозвуковой скорости в предположении постоянства физических констант газа поступают следующим образом. По формуле (VII-27)

$$c_f \sqrt{Re_x} = 0,664$$

определяют локальный коэффициент трения c_f при заданном числе Рейнольдса. По формуле (VII-48)

$$St_x = \frac{c_f}{2} \frac{1}{Pr^{2/3}}$$

определяют число Стантона при заданном постоянном числе Прандтля; очень часто для упрощения задачи принимают $Pr = 1$, если тело обтекается газом. По формуле (VII-47)

$$St_x = \frac{\alpha}{\rho c_p W_{x,\infty}}$$

определяют коэффициент теплоотдачи α_x .

Эта методика дает удовлетворительные результаты и для реальных условий (переменные физические константы), если скорость газа остается дозвуковой, а отношение температур T_w/T_∞ колеблется в пределах 0,5—1,5.

Достоинство этой методики состоит в том, что число параметров (Re , Pr , W) потока, влияющих на коэффициент теплоотдачи α , оказывается минимальным, и она применима для любой жидкости.

Теперь попытаемся выяснить, можно ли пользоваться формулами (VII-27), (VII-48) для определения коэффициента теплоотдачи α в сверхзвуковом потоке при изменяющихся физических константах газа.

Вначале рассмотрим случай, когда коэффициент вязкости зависит от температуры

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^n, \quad (XI-67)$$

а число Прандтля Pr и теплоемкость c_p остаются неизменными. Представим число Прандтля в виде

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{Pr}{c_p}. \quad (XI-68)$$

Из (XI-67) следует, что при $Pr = \text{const}$ коэффициент теплопроводности λ изменяется пропорционально коэффициенту вязкости μ .

В рассматриваемом случае число параметров, от которых зависит коэффициент теплоотдачи α , увеличится минимум на два $\frac{T_w}{T_\infty}$ и n по сравнению с дозвуковым потоком (Re , Pr , W), в котором физические константы принимались постоянными.

Анализ решений уравнений пограничного слоя для различных отношений $\frac{T_w}{T_\infty}$ и различных значений n (XI-67) показал, что выражения (XI-7) для коэффициента восстановления r и (VII-48) для числа Стантона сохраняют свою силу и в рассматриваемом случае. В то же время было установлено, что трение и теплоотдача изменяются с изменением чисел Прандтля и Маха, отношения температур $\frac{T_w}{T_\infty}$ и показателя n . Ввиду справедливости выражения (VII-48) далее будет обсуждаться

лишь изменение коэффициента трения c_f . Интенсивность и характер изменения коэффициента трения от названных параметров будут различными в зависимости от того, по какой температуре определены физические константы и плотность газа. Если по термодинамической температуре невозмущенного потока T_∞ , то коэффициент c_f значительно уменьшается с увеличением числа Маха, увеличением отношения температур $\frac{T_w}{T_\infty}$ и уменьшением показателя n . Отметим здесь интересный факт: при $n = 1$ коэффициент трения c_f оказывается независимым от числа Маха и отношения $\frac{T_w}{T_\infty}$, следовательно, уравнения (VII-27),

(VII-48) и (XI-7) оказываются справедливыми не только для случая постоянных физических констант, но и для случая, когда коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ переменны и изменяются прямо пропорционально абсолютной температуре.

Если физические константы и плотность газа определены по температуре стенки T_w , то характер изменения коэффициента трения c_f от числа Маха для $n < 1$ изменяется на противоположный по сравнению с тем, который имел место при определении физических констант по температуре T_∞ .

Можно подобрать некоторую эталонную температуру T^* , которая находится между двумя названными, и если по ней определять физические константы, то коэффициент трения c_f не будет зависеть от числа Маха, и формула (VII-27) окажется пригодной для сверхзвуковых потоков при $dp/dx = 0$, $T_w(x) = \text{const}$.

Рассмотрим более сложный случай, когда не только коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ , но и теплоемкость c_p , и число Прандтля Pr зависят от температуры. Такая физическая обстановка возникает в пограничном слое при очень больших скоростях потока. Большинство работ, посвященных изучению этого случая, выполнены для воздуха.

В условиях рассматриваемого случая число параметров, от которых зависит коэффициент трения c_f , возрастает еще на один — это некоторая характерная температура, например, абсолютная температура невозмущенного потока.

На основании вычислений установлено, что структура уравнения (VII-27) сохраняется и для рассматриваемого случая, но коэффициент пропорциональности уже не равен постоянной 0,664. Он оказывается функцией числа Маха, отношения температур $\frac{T_w}{T_\infty}$ и характерной температуры. Для рассматриваемого случая, так же как и для предыдущего, можно подобрать эталонную температуру T^* такую, что если по ней определить физические константы газа, то коэффициент пропорциональности в уравнении (VII-27) останется величиной постоянной и равной 0,664.

Эккерт Э. Р. [91] предложил формулу для определения эталонной температуры T^* , которая дает удовлетворительные результаты для обоих рассмотренных случаев, вплоть до числа Маха $M \approx 15$.

Формула для эталонной температуры имеет вид

$$T^* = T_{\infty} + 0,5 (T_w - T_{\infty}) + 0,22 (T_r - T_{\infty}). \quad (XI-69)$$

Имея значение c_f для конкретной задачи, можно найти число Стантона по формуле (VII-48), в которую подставляют число Прандтля, найденное для эталонной температуры (XI-69).

Зная число Стантона, находят коэффициент теплоотдачи α по формуле (VII-47), в которую подставляют плотность ρ^* и теплоемкость c_p^* , найденные для эталонной температуры.

Далее можно определить тепловой поток по формуле (XI-6)

$$q_w = \alpha (T_r - T_w).$$

В формуле (XI-6) неизвестна температура восстановления T_r . Для ее определения нужно знать коэффициент восстановления температуры r (XI-5). Исследования показали, что если величину r определять по (XI-5), то, оказывается, она сильно зависит от числа Маха M и температуры невозмущенного потока T_{∞} . Эту зависимость можно резко уменьшить, если вместо теплоемкости невозмущенного потока ввести в знаменатель (XI-5) теплоемкость при эффективной температуре T^* (XI-69). В результате получим

$$r^* = \frac{T_r - T_{\infty}}{W_{\infty}^2 / 2c_p^*}. \quad (XI-70)$$

Расчеты показывают, что коэффициент r^* (XI-70) очень мало зависит от числа Маха и температуры невозмущенного потока. Эта оставшаяся зависимость хорошо аппроксимируется уравнением (XI-7), если в него ввести число Прандтля, найденное для эталонной температуры T^*

$$r^* = \sqrt{\text{Pr}}. \quad (XI-71)$$

Доказано, что соотношения, полученные для газовых процессов в предположении постоянной теплоемкости, не изменятся существенно и для газовых процессов с переменной теплоемкостью, если в этих соотношениях заменить произведение $c_p dT$ дифференциалом энтальпии dh . На этом основании можно учесть влияние переменной теплоемкости на коэффициент восстановления, если определять его не по (XI-5), а по следующей формуле:

$$r_h = \frac{h_r - h_{\infty}}{h_{0, \infty} - h_{\infty}} = \frac{h_r - h_{\infty}}{W_{\infty}^2 / 2} \quad (XI-72)$$

где r_h — коэффициент восстановления энтальпии;
 $h_{0, \infty}$ — энтальпия торможения или энтальпия заторможенного потока;
 h_r, h_{∞} — энтальпии восстановления и невозмущенного потока.

На том же основании число Стантона определяют не по (VII-47), а по следующей формуле:

$$\text{St}_h = \frac{q_w}{\rho_{\infty} W_{\infty} (h_r - h_{\infty})}. \quad (XI-73)$$

С учетом введенного определения числа Стантона (XI-73) представим формулу (VII-47) применительно к приближенной методике в виде

$$\frac{c_f}{2\text{St}_h} = \text{Pr}^{*2/3}. \quad (XI-74)$$

Сравнение результатов точного решения уравнений пограничного слоя для параметра $\frac{c_f}{2\text{St}_h}$ и приближенного, полученного по формуле (XI-74), когда величина $\text{Pr}^{*2/3}$ определяется по эталонной температуре (XI-69), показывает удовлетворительное совпадение.

Исследования Э. Р. Эккерта показали, что разработанная им приближенная методика определения коэффициента трения c_f , энтальпии восстановления h_r и числа Стантона St_h будет давать наилучшее совпадение с аналогичными величинами, подсчитанными на основании точных решений уравнений пограничного слоя, если физические константы газа определять не по эталонной температуре T^* , а по эталонной энтальпии, выражение для которой имеет вид

$$h^* = h_{\infty} + 0,5 (h_w - h_{\infty}) + 0,22 (h_w - h_{\infty}). \quad (XI-75)$$

Если в качестве эталонной величины в рассматриваемой методике принята энтальпия h^* (XI-75), то коэффициент теплоотдачи α_h определяют по формуле

$$\text{St}_h = \frac{\alpha_h}{\rho_{\infty} W_{\infty}}, \quad (XI-76)$$

а тепловой поток по формуле

$$q_w = \alpha_h (h_r - h_w). \quad (XI-77)$$

Основной неопределенностью в вычислении коэффициентов восстановления (XI-71) и коэффициента трения (XI-74) является недостаточность современных знаний о числах Прандтля воздуха для высоких температур.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В предыдущих разделах было установлено, что для ламинарного пограничного слоя можно аналитически найти коэффициент трения c_f и коэффициент теплоотдачи α . Причем точность найденных величин столь велика, что обеспечить такую же в экспериментальных измерениях чрезвычайно трудно.

Переходя к изучению турбулентного пограничного слоя в сжимаемой жидкости, отметим следующее: современные знания о механизме турбулентного переноса количества движения и теплоты недостаточны для того, чтобы аналитически определить трение (т. е. коэффициент трения c_f) и теплообмен (т. е. коэффициент теплоотдачи α). Поэтому во всех созданных методиках расчета в той или иной форме используются экспериментальные данные. Ранее, в гл. VII, уже отмечалось, что для математического исследования турбулентного течения целесообразно разложить его на осредненное и на пульсационное движения. В турбулентном течении сжимаемой жидкости происходят пульсации скорости, давления, плотности и температуры.

Рассмотрим систему уравнений двумерного турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости на продольно обтекаемой пластине с нулевым градиентом давления, полученную Ван Дриестом [12]. Если турбулентное течение разложить на осредненное и на пульсационное движения и пренебречь молекулярным переносом количества движения и теплоты, то уравнение движения и энергии можно представить в следующей форме:

уравнение движения

$$\overline{\rho w_x} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \overline{\rho w_y} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [-(\overline{\rho w_y})' \bar{w}_x']. \quad (\text{XI-78})$$

Введем определение (см. например VII-60)

$$-(\overline{\rho w_y})' \bar{w}_x' = \epsilon_\sigma \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right), \quad (\text{XI-79})$$

где ϵ_σ — коэффициент турбулентной вязкости в сжимаемой жидкости;

$$-(\overline{\rho w_y})' \bar{w}_x' = -\bar{\rho} \bar{w}_x' \bar{w}_y' - \bar{w}_y \bar{\rho}' \bar{w}_x' - \bar{\rho}' \bar{w}_x' \bar{w}_y'.$$

Уравнение движения (XI-78) с учетом определения (XI-79) примет вид

$$\overline{\rho w_x} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \overline{\rho w_y} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_\sigma \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right). \quad (\text{XI-80})$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned} \overline{\rho w_x} \frac{\partial}{\partial x} (c_p \bar{T}) + \overline{\rho w_y} \frac{\partial}{\partial y} (c_p \bar{T}) = \\ = \frac{\partial}{\partial y} [-c_p (\overline{\rho w_y})' \bar{T}'] - (\overline{\rho w_y})' \bar{w}_x' \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{XI-81})$$

Введем определение

$$-c_p (\overline{\rho w_y})' \bar{T}' = \epsilon_q \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right), \quad (\text{XI-82})$$

где ϵ_q — коэффициент турбулентной теплопроводности в сжимаемой жидкости.

Уравнение энергии (XI-81) с учетом определения (XI-82) имеет вид

$$\overline{\rho w_x} \frac{\partial}{\partial x} (c_p \bar{T}) + \overline{\rho w_y} \frac{\partial}{\partial y} (c_p \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_q \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \epsilon_\sigma \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2; \quad (\text{XI-83})$$

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho w_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho w_y}) = 0. \quad (\text{XI-84})$$

Решение уравнения энергии

Преобразуем уравнение энергии (XI-83), полагая, что турбулентное число Прандтля в сжимаемой жидкости $\text{Pr}_{\text{тб.сж}}$ равно единице

$$\text{Pr}_{\text{тб.сж}} \equiv \frac{c_p \epsilon_\sigma}{\epsilon_q} = 1. \quad (\text{XI-85})$$

Уравнение энергии (XI-83) с учетом (XI-85) и дополнительного, упрощающего решение условия $c_p = \text{const}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\rho w_x} \frac{\partial}{\partial x} (c_p \bar{T}) + \overline{\rho w_y} \frac{\partial}{\partial y} (c_p \bar{T}) = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon_\sigma \frac{\partial}{\partial y} (c_p \bar{T}) \right] + \epsilon_\sigma \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{XI-86})$$

Допустим, что температура является функцией составляющей скорости в направлении x , т. е. $c_p \bar{T} = f(\bar{w}_x)$, тогда уравнение (XI-86) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \overline{\rho w_x} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} \frac{df(\bar{w}_x)}{d\bar{w}_x} + \overline{\rho w_y} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \frac{df(\bar{w}_x)}{d\bar{w}_x} = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon_\sigma \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \frac{df(\bar{w}_x)}{d\bar{w}_x} + \epsilon_\sigma \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)^2 \right] = \\ = \frac{df(\bar{w}_x)}{d\bar{w}_x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_\sigma \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) + \epsilon_\sigma \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2 \frac{d^2 f(\bar{w}_x)}{d\bar{w}_x^2} + \epsilon_\sigma \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2 = \\ = \frac{df(\bar{w}_x)}{d\bar{w}_x} \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\epsilon_\sigma \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) + \epsilon_\sigma \left[\frac{d^2 f(\bar{w}_x)}{d\bar{w}_x^2} + 1 \right] \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{XI-87})$$

Из (XI-87) следует, что при

$$\frac{d^2 f(\bar{w}_x)}{d\bar{w}_x^2} = -1 \quad (\text{XI-88})$$

удовлетворяется уравнение количества движения (XI-80). Интегрируя (XI-88), получим

$$c_p \bar{T} = A_1 \bar{w}_x + B_1 - \frac{\bar{w}_x^2}{2}, \quad (\text{XI-89})$$

где A_1 и B_1 — постоянные интегрирования.

Сделаем еще одно допущение. Будем считать, что число Прандтля ламинарного подслоя постоянно и равно единице. Ранее для ламинарного пограничного слоя было получено уравнение (XI-28), идентичное уравнению (XI-89). Значит уравнение (XI-89) можно применять по всей толщине турбулентного пограничного слоя, включая ламинарный подслой вплоть до поверхности стенки. Используя граничные условия

$$\bar{T} = T_w \quad \text{при} \quad \bar{w}_x = 0;$$

$$\bar{T} = T_\infty \quad \text{при} \quad \bar{w}_x = W_{x, \infty},$$

а также соотношение, получаемое из (XI-4) и (XI-11) в виде

$$\frac{W_{x, \infty}^2}{2c_p T_\infty} = \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2, \quad (\text{XI-90})$$

представим решение уравнения (XI-89) в форме, которая оказывается идентичной уравнению (XI-31) для ламинарного потока

$$\frac{\bar{T}}{T_\infty} = \frac{T_w}{T_\infty} - \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right) \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \left(1 - \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right). \quad (\text{XI-91})$$

Значит путем преобразований, например, аналогичных тем, которые сделаны для уравнения (XI-31), можно получить на основании (XI-91) следующее важное соотношение:

$$St_\infty = \frac{1}{2} c_{f, \infty}. \quad (\text{XI-92})$$

Следовательно, если известен коэффициент трения $c_{f, \infty}$, то из (XI-92) можно определить искомый коэффициент теплоотдачи α_x .

Определение коэффициента трения c_f

Турбулентное касательное напряжение определяется из (XI-79)

$$\sigma_{\tau 6} = -(\overline{\rho w_y})' \bar{w}_x' = -\bar{\rho} \bar{w}_x' \bar{w}_y' - \bar{w}_y \bar{\rho}' \bar{w}_x' - \bar{\rho}' \bar{w}_x' \bar{w}_y'.$$

Для тонкого пограничного слоя можно принять $\bar{w}_y \approx 0$, тогда последнее выражение примет вид

$$\sigma_{\tau 6} = -\bar{\rho} \bar{w}_x' \bar{w}_y' - \bar{\rho}' \bar{w}_x' \bar{w}_y'. \quad (\text{XI-93})$$

Пренебрегая тройными корреляциями, можно упростить (XI-93)

$$\sigma_{\tau 6} = -\bar{\rho} \bar{w}_x' \bar{w}_y'. \quad (\text{XI-94})$$

Полученное выражение не отличается от аналогичного для несжимаемой жидкости (VII-64); разница состоит только в том, что в (XI-94) плотность переменная. Применяя гипотезу Прандтля о линейной зависимости длины пути смещения от координаты y (гл. VII, § 6), можно написать для сжимаемого пограничного слоя формулу (VII-76a), заменив в ней постоянную плотность ρ на переменную $\bar{\rho}$

$$\frac{d \bar{w}_x}{dy} = \left(\frac{1}{K} \right) \sqrt{\frac{\tau_w}{\bar{\rho}}} \frac{1}{y}. \quad (\text{XI-95})$$

Давление по толщине пограничного слоя принимают постоянным, тогда из уравнения состояния $\bar{p} = \bar{\rho} R T$ получим

$$\bar{\rho} \bar{T} = \frac{p}{R} = \text{const},$$

откуда

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_w} = \frac{T_w}{\bar{T}}. \quad (\text{XI-96})$$

Умножим (XI-91) на отношение $\frac{T_\infty}{T_w}$ и после преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T}}{T_w} = 1 + \left[\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right) \frac{T_\infty}{T_w} - 1 \right] \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} - \\ - \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \frac{T_\infty}{T_w} \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{XI-97})$$

Заменим левую часть (XI-97) на основании (XI-96)

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_w} = \frac{1}{1 + B \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right) - A^2 \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right)^2}, \quad (\text{XI-98})$$

где

$$A^2 = \frac{\left(\frac{\kappa - 1}{2} \right) M_\infty^2}{T_w / T_\infty} \quad \text{и} \quad B = \frac{1 + \left(\frac{\kappa - 1}{2} \right) M_\infty^2}{T_w / T_\infty} - 1. \quad (\text{XI-99})$$

Подставим (XI-98) в (XI-95), разделим на $W_{x, \infty}$ и после преобразования получим

$$\frac{d(\bar{w}_x / W_{x, \infty})}{\left[1 + B(\bar{w}_x / W_{x, \infty}) - A^2(\bar{w}_x / W_{x, \infty})^2 \right]^{1/2}} = \frac{1}{W_{x, \infty}} \cdot \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} \frac{dy}{y}. \quad (\text{XI-100})$$

Интегрируя (XI-100), получим

$$\frac{1}{A} \arcsin \frac{2A^2 (\bar{w}_x / W_{x, \infty} - B)}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}} =$$

$$= \text{const} + \frac{1}{W_{x, \infty}} \frac{1}{W_{x, \infty}} \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho w}} \ln y. \quad (\text{XI-101})$$

Поясним интегрирование левой части (XI-100). Обозначим $\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}}$ через x и, учитывая, что

$$Bx - A^2 x^2 = - (A^2 x^2 - Bx) = - \left(Ax - \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{B^2}{4A^2}$$

приведем левую часть (XI-100) к виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + Bx - A^2 x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(Ax - \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{B^2}{4A^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{4A^2}}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(1 + \frac{B^2}{4A^2} \right)^{-1} \left(Ax - \frac{B}{2A} \right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{A} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

где $\frac{Ax - B/2A}{\sqrt{1 + B^2/4A^2}} = z$ и $dx = \frac{1}{A} \sqrt{1 + B^2/4A^2} dz$.

После интегрирования и перехода к первоначальным переменным получим левую часть уравнения (XI-101)

$$\frac{1}{A} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{A} \arcsin z = \frac{1}{A} \arcsin \frac{Ax - \frac{B}{2A}}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{4A^2}}} =$$

$$= \frac{1}{A} \arcsin \frac{2A^2 x - B}{\sqrt{4A^2 + B^2}} = \frac{1}{A} \arcsin \frac{2A^2 \bar{w}_x / W_{x, \infty} - B}{(4A^2 + B^2)^{1/2}}.$$

Полученное уравнение (XI-101) при $M_\infty = 0$ и $\frac{T_w}{T_\infty} = 1$ должно принять вид соответствующего уравнения для несжимаемой жидкости, поэтому его необходимо записать в форме

$$\frac{1}{A} \arcsin \frac{2A^2 \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right) - B}{\sqrt{B^2 + 4A^2}} + \frac{1}{A} \arcsin \frac{B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}} =$$

$$= \text{const} + \frac{1}{W_{x, \infty}} \cdot \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho w}} \ln y, \quad (\text{XI-102})$$

или

$$\frac{1}{A} \arcsin \frac{2A^2 \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right) - B}{(B^2 - 4A^2)^{1/2}} + \frac{1}{A} \arcsin \frac{B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{W_{x, \infty}} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho w}} \left(F + \frac{1}{K} \ln \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho w}} \frac{y}{v_w} \right), \quad (\text{XI-103})$$

где F — константа;

v_w — коэффициент кинематической вязкости при температуре стенки, введен из-за его влияния в ламинарном подслое.

Полученное уравнение (XI-103) представляет собой универсальное распределение скорости в сжимаемом турбулентном пограничном слое. Константы F и K должны определяться экспериментально.

Поясним происхождение левой части уравнения (XI-102). На основании (VII-76a) для несжимаемой жидкости можно написать

$$\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} = \text{const} + \frac{1}{W_{x, \infty}} \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho w}} \ln y. \quad (\text{XI-104})$$

Правые части (XI-102) и (XI-104) одинаковы. Левая часть (XI-104) обращается в нуль при $\bar{w}_x \rightarrow 0$. Если в (XI-101) положить $M_\infty = 0$ и $\frac{T_w}{T_\infty} = 1$, то оно должно превращаться в соответствующее уравнение для несжимаемой жидкости и тогда его левая часть при $\bar{w}_x \rightarrow 0$ должна обращаться в нуль, так же как это происходит в (XI-104).

Для того чтобы удовлетворить это требование, левая часть (XI-101) дополняется специально подобранным членом, который можно видеть в левой части (XI-102).

Покажем, что левая часть (XI-102) будет обращаться в нуль. Из (XI-99) следует, что если отношение $\frac{T_w}{T_\infty}$ стремится к единице, т. е. $\frac{T_w}{T_\infty} \rightarrow 1$, то $A^2 = B$, поэтому первый член левой части (XI-102) можно представить в виде

$$\frac{1}{A} \arcsin \frac{2A^2 \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right) - B}{\sqrt{B^2 + 4A^2}} = \frac{1}{A} \arcsin \frac{2A^2 \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right) - A^2}{\sqrt{A^4 + 4A^2}} =$$

$$= \frac{1}{A} \arcsin \frac{2A \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right) - A}{\sqrt{A^2 + 4}}.$$

При $M_\infty \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$ ($B \rightarrow 0$) последнее выражение примет вид

$$\frac{1}{A} \arcsin \frac{2A \left(\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} \right) - A}{\sqrt{A^2 + 4}} \approx \frac{1}{A} \arcsin \frac{\left(2 \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} - 1 \right) A}{2},$$

но так как при $x \rightarrow 0$, $\arcsin x \rightarrow x + \dots$, то полученное выражение можно представить в виде

$$\frac{1}{A} \arcsin \frac{\left(2 \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} - 1\right) A}{2} \approx \frac{1}{A} \frac{\left(2 \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} - 1\right) A}{2} = \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} - \frac{1}{2}.$$

Путем аналогичных преобразований второй член левой части (XI-102) сводится к $+1/2$. Суммируя оба члена левой части (XI-102), получим

$$\frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}}.$$

Теперь при $\bar{w}_x \rightarrow 0$ левая часть (XI-102), написанная для несжимаемой жидкости, так же как левая часть (XI-104), обращается в нуль.

Касательное напряжение на стенке можно определить путем решения интегрального уравнения движения для турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости

$$\tau_w = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_{тб}} \bar{\rho} \bar{w}_x (W_{x, \infty} - w_x) dy. \quad (XI-105)$$

Это уравнение отличается от соответствующего для несжимаемого пограничного слоя (VII-84) тем, что плотность $\bar{\rho}$ является переменной. В уравнении (XI-105) двойными и тройными корреляциями пренебрежено.

Зная распределение скорости по толщине пограничного слоя (XI-103), константы F и K , а также зависимость плотности ρ от параметров потока (XI-98), можно решить интегральное уравнение (XI-105), т. е. найти касательное напряжение τ_w на стенке, а следовательно, и коэффициент трения c_f .

В результате решения (приводится петитом) интегрального уравнения (XI-105) получим уравнение (XI-120).

Подставим в (XI-104) вместо плотности ρ ее значение из (XI-98).

Дифференцируя (XI-102), найдем значение dy и подставим в (XI-105)

$$\tau_w = \frac{D \mu_w W_{x, \infty}}{K} \frac{d}{dx} \left\{ I a^2 \exp \left[\frac{a}{A} \arcsin \frac{B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (XI-106)$$

где

$$D = e^{-FK},$$

$$a = K W_{x, \infty} / \sqrt{\tau_w / \rho_w},$$

$$I = \int_0^1 \frac{z(1-z)}{(1+Bz+A^2z^2)^{3/2}} \exp \left[\frac{a}{A} \arcsin \frac{2A^2z-B}{(B^2+4A^2)^{1/2}} \right] dz, \quad (XI-107)$$

$$z = \frac{\bar{w}_x}{W_{x, \infty}},$$

x — расстояние вдоль пластины, измеряемое от ее передней кромки.

Уравнение (XI-107) для I можно разложить в ряд с помощью интегрирования по частям. Полученный ряд можно аппроксимировать следующим выражением, если членами более высокого порядка, чем $\frac{1}{a^2}$, пренебречь:

$$I = \frac{1}{a^2 (1+B-A^2)^{1/2}} \exp \left[\frac{a}{A} \arcsin \frac{2A^2-B}{(B^2+4A^2)^{1/2}} \right] + \frac{1}{a^2} \exp \left[-\frac{a}{A} \arcsin \frac{B}{(B^2+4A^2)^{1/2}} \right]. \quad (XI-108)$$

В обычных условиях нагрева или охлаждения можно ограничиться только первым членом в (XI-108).

Подстановка первого члена (XI-108) в (XI-106) дает

$$\tau_w = \frac{D \mu_w W_{x, \infty}}{K (1+B-A^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \times \left\{ \exp \left[\frac{a}{A} \arcsin \frac{2A^2-B}{(B^2+4A^2)^{1/2}} + \arcsin \frac{B}{(B^2+4A^2)^{1/2}} \right] \right\} \quad (XI-109)$$

или после преобразования

$$\frac{\rho_w W_{x, \infty}}{\mu_w} dx = \frac{D}{K^3} \frac{1}{(1+B+A^2)^{1/2}} a^2 \times \times d \left\{ \exp \left[\frac{a}{A} (\arcsin \alpha + \arcsin \beta) \right] \right\}, \quad (XI-110)$$

где

$$\alpha = \frac{2A^2-B}{(B^2+4A^2)^{1/2}} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{B}{(B^2+4A^2)^{1/2}}.$$

Допустим, что изменение температуры стенки по x мало по сравнению с изменением трения по той же координате. Примем, что касательное напряжение на передней кромке $x=0$ пластины бесконечно большая величина, тогда нижний предел для a будет нуль. В этих условиях интегрирование (XI-110) дает

$$\frac{\rho_w W_{x, \infty} x}{\mu_w} = \frac{a^2}{(1+B-A^2)} \frac{D}{K^3} \exp \left[\frac{a}{A} (\arcsin \alpha + \arcsin \beta) \right]$$

или

$$\frac{(2)^{1/2}}{A (c_{f, w})^{1/2}} (\arcsin \alpha + \arcsin \beta) = \text{const} + \frac{1}{K} \ln \left[c_{f, w} \text{Re}_w \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^{-\frac{1}{2}} \right], \quad (XI-111)$$

где

$$\frac{T_w}{T_\infty} = (1+B-A^2)^{-1}, \quad c_{f, w} = \frac{2\tau_w}{\rho_w W_{x, \infty}} = \frac{2K^3}{a^2},$$

$$\text{Re}_w = \frac{\rho_w W_{x, \infty} x}{\mu_w}.$$

Выразим уравнение (XI-111) через параметры свободного потока. На основании (XI-96) можно написать

$$\rho_w = \rho_\infty \frac{T_\infty}{T_w}. \quad (\text{XI-112})$$

По определению (VII-25) коэффициент трения можно представить в двух формах

$$c_{f,\infty} = \frac{\tau_w}{(\rho_\infty/2) W_{x,\infty}} \quad (\text{XI-113})$$

и

$$c_{f,w} = \frac{\tau_w}{(\rho_w/2) W_{x,\infty}}. \quad (\text{XI-114})$$

Сопоставляя (XI-112), (XI-113) и (XI-114), получим

$$\frac{c_{f,w}}{c_{f,\infty}} = \frac{\rho_\infty}{\rho_w} = \frac{T_w}{T_\infty},$$

откуда

$$c_{f,w} = c_{f,\infty} \frac{T_w}{T_\infty}. \quad (\text{XI-115})$$

Для вязкости можно принять степенной закон

$$\frac{\mu_w}{\mu_\infty} = \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^n. \quad (\text{XI-116})$$

Теперь выразим число Рейнольдса для параметров потока у стенки $\text{Re}_w = \frac{\rho_w W_{x,\infty} x}{\mu_w}$ через число Рейнольдса для параметров свободного потока $\text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty W_{x,\infty} x}{\mu_\infty}$.

Для этого найдем отношение

$$\frac{\text{Re}_w}{\text{Re}_\infty} = \frac{\rho_w W_{x,\infty} x}{\mu_w} \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty W_{x,\infty} x} = \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \frac{\mu_\infty}{\mu_w}.$$

В полученное выражение подставим значение ρ_w из (XI-112) и значение отношения $\frac{\mu_\infty}{\mu_w}$ из (XI-116). В результате получим

$$\text{Re}_w = \text{Re}_\infty \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^{-(1+n)}. \quad (\text{XI-117})$$

С учетом (XI-112), (XI-115) и (XI-117) уравнение (XI-111) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(2)^{1/2}}{A (c_{f,\infty})^{1/2} (T_w/T_\infty)^{1/2}} (\arcsin \alpha + \arcsin \beta) = \\ & = \text{const} + \frac{1}{K} \left[\ln \text{Re}_\infty c_{f,\infty} - \frac{1+2n}{2} \ln \frac{T_w}{T_\infty} \right], \end{aligned} \quad (\text{XI-118})$$

где

$$\alpha = \frac{2A^2 - B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}}$$

и

$$\beta = \frac{B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}};$$

n — показатель степени в законе вязкости (XI-116). Константы в уравнении (XI-118) можно определить только на основании экспериментальных исследований. Здесь мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что механизм переноса количества движения в турбулентном пограничном слое неизвестен, а следовательно, и коэффициент трения c_f нельзя определять аналитически.

На основании экспериментальных данных Кáрман составил уравнение для определения локального коэффициента трения для случая несжимаемой жидкости в форме

$$\frac{1}{(c_{f,\infty})^{1/2}} = 1,70 + 4,15 \log \text{Re}_\infty c_{f,\infty}. \quad (\text{XI-119})$$

При $M = 0$ и $\frac{T_w}{T_\infty} = 1$ уравнение (XI-118) должно свестись к уравнению (XI-119). На этом основании определены константы в уравнении (XI-119), с их учетом оно имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{0,242}{A (c_{f,\infty})^{1/2} \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^{1/2}} (\arcsin \alpha + \arcsin \beta) = \\ & = 0,41 + \log \text{Re}_\infty c_{f,\infty} - \frac{1+2n}{2} \log \frac{T_w}{T_\infty}. \end{aligned} \quad (\text{XI-120})$$

Это уравнение было получено Ван Дрийдом [12]. Оно служит для определения локального значения коэффициента трения c_f в сжимаемом турбулентном пограничном слое.

Зная коэффициент c_f , можно определить локальный турбулентный коэффициент теплоотдачи α_x по формуле (XI-92).

Формула (XI-120) громоздка и неудобна для практического использования. Поэтому результаты расчета по формуле (XI-120) и (XI-92) представляются в форме графиков.

На рис. XI-8 представлена зависимость локального числа Стантона St_∞ для пластины, подсчитанного по параметрам свободного потока, — от критерия Рейнольдса Re_∞ для воздуха при $n = 0,76$, $\kappa = 1,4$, $M_\infty = 0$, $T_w/T_\infty = 1$.

На рис. XI-9 представлена та же зависимость при

$$M_\infty = 2, T_w/T_\infty = 1 \text{ и } T_w/T_\infty = 1,8.$$

На рис. XI-10 представлена та же зависимость при $M_\infty = 4$,

$$T_w/T_\infty = 1, T_w/T_\infty = 2, T_w/T_\infty = 3 \text{ и } T_w/T_\infty = 4,2.$$

На рис. XI-11 представлена та же зависимость при $M_\infty = 5$,

$$T_w/T_\infty = 1, T_w/T_\infty = 2, T_w/T_\infty = 4, T_w/T_\infty = 5 = T_{aw}/T_\infty.$$

На рис. XI-12 представлена та же зависимость при $M_\infty = 6$,
 $T_w/T_\infty = 2$, $T_w/T_\infty = 4,0$, $T_w/T_\infty = 6$, $T_w/T_\infty = 8,2$.

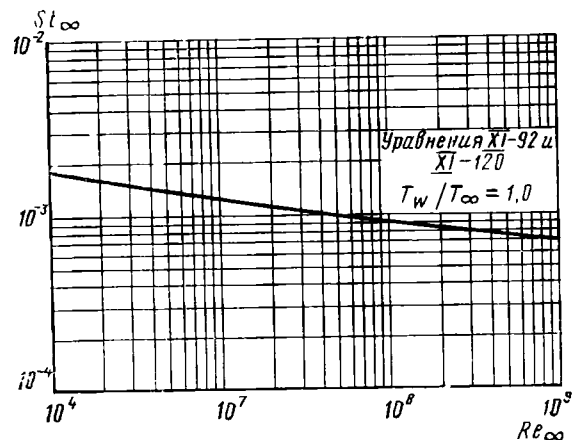


Рис. XI-8. Зависимость $St_\infty = f(Re_\infty)$ для $M_\infty = 0$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

На рис. XI-13 представлена та же зависимость при $M_\infty = 8$,
 $T_w/T_\infty = 2$, $T_w/T_\infty = 4$, $T_w/T_\infty = 6$, $T_w/T_\infty = 8$, $T_w/T_\infty = 13,8$.

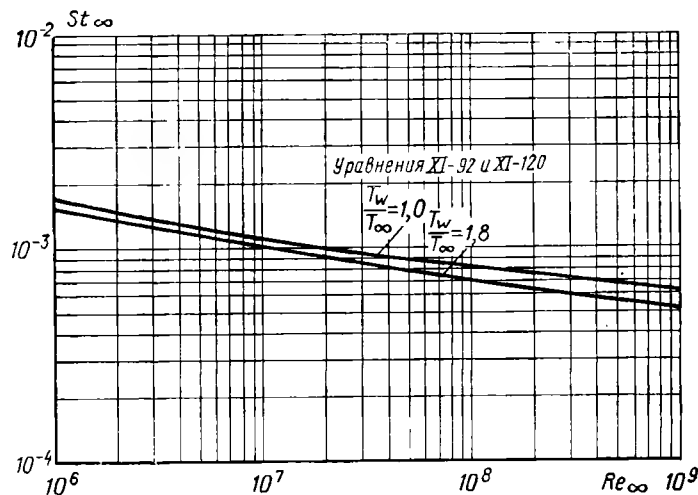


Рис. XI-9. Зависимость $St_\infty = f(Re_\infty)$ для $M_\infty = 2$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

На рис. XI-14 представлена та же зависимость при
 $M_\infty = 10$, $T_w/T_\infty = 4,0$, $T_w/T_\infty = 8,0$, $T_w/T_\infty = 12$, $T_w/T_\infty = 21$.

На всех этих рисунках наибольшее значение T_w/T_∞ соответствует случаю теплоизолированной пластины.

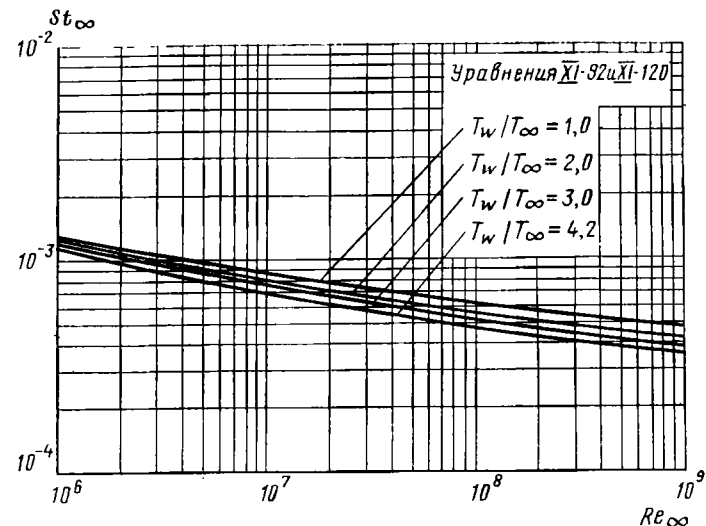


Рис. XI-10. Зависимость $St_\infty = f(Re_\infty)$ для $M_\infty = 4$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

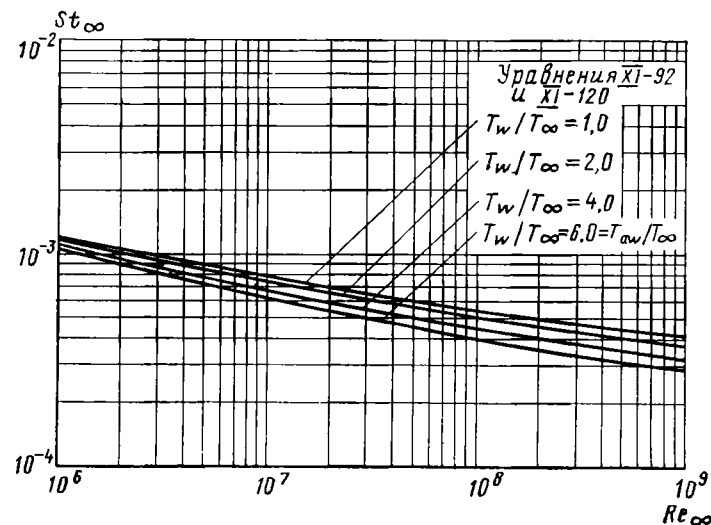


Рис. XI-11. Зависимость $St_\infty = f(Re_\infty)$ для $M_\infty = 5$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

По формуле (XI-120) определяют значение коэффициента c_f для пластины. Однако, используя простое правило, можно подсчитать значение c_f и для конуса. Согласно этому правилу для определения c_f на конусе

поступают следующим образом: находят значение критерия Рейнольдса для потока, обтекающего конус; половину найденного значения под-

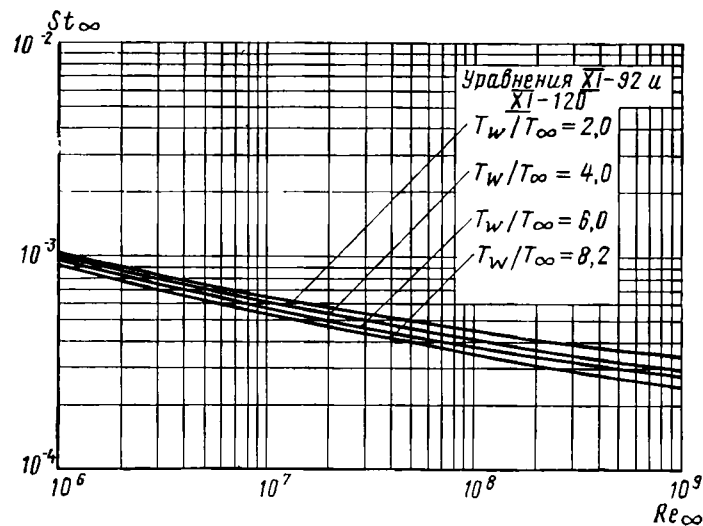


Рис. XI-12. Зависимость $St_\infty = f(Re_\infty)$ для $M=6$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

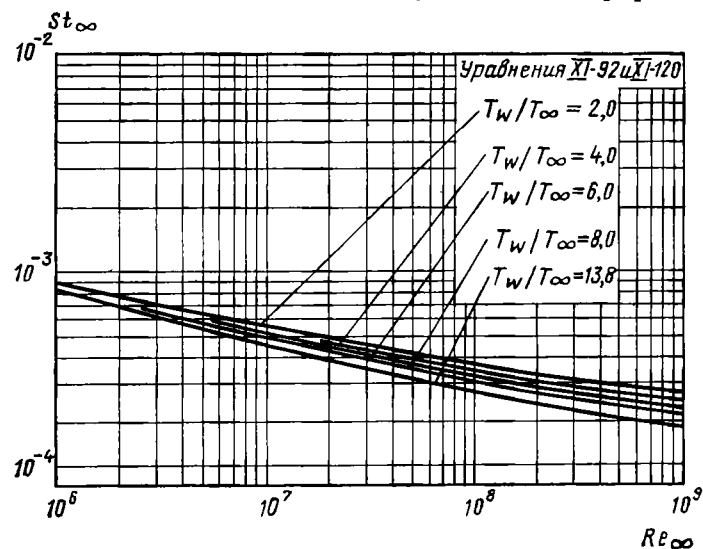


Рис. XI-13. Зависимость $St_\infty = f(Re_\infty)$ для $M=8$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

ставляют в формулу (XI-120) вместо Re_∞ и решают (XI-120) относительно c_f . Полученный ответ и будет искомым коэффициентом трения для конуса при том же отношении T_w/T_∞ , что и для пластины.

Как показывают расчеты, коэффициент трения c_f , подсчитанный для конуса по указанному правилу, оказывается большим по сравнению с аналогичным для пластины на 10—15%. Очевидно, что найденный коэффициент будет справедлив для развитого турбулентного пограничного слоя на конусе. На затупленных конусах в окрестности передней критической точки числа Рейнольдса малы и поэтому здесь существует ламинарный пограничный слой.

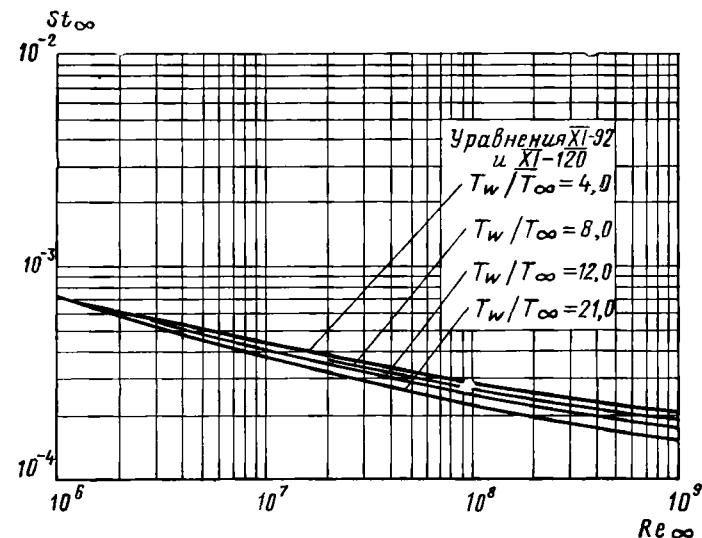


Рис. XI-14. Зависимость $St_\infty = f(Re_\infty)$ для $M_\infty=10$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный на конусах со сферическим носком, как показал Ван Дрийт, происходит при критическом числе Рейнольдса, равном

$$Re_{кр} = \frac{\omega_1 \delta^*}{\nu} = 150, \quad (XI-121)$$

где δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя, определяемая по правилам для несжимаемого слоя (VII-16a);

ω_1 — скорость на внешней кромке пограничного слоя.

Если для невозмущенного потока числа Маха и Рейнольдса соответственно равны $M = 10$ и $Re_\infty = 2 \cdot 10^7$, то согласно (XI-121) переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный должен происходить на угловом расстоянии от критической точки, равном 9° .

Формулу для определения среднего коэффициента трения $C_{f\infty}$ можно вывести по той же схеме, что и для определения локального коэффициента трения $c_{f\infty}$ (XI-120). При выводе используется уравнение Кафмана для среднего коэффициента трения в несжимаемой жидкости

в форме

$$\frac{0,242}{C_{f,\infty}^{1/2}} = \log \operatorname{Re}_{\infty} C_{f,\infty}, \quad (\text{XI-122})$$

так же как было использовано уравнение (XI-119) при выводе формулы (XI-120).

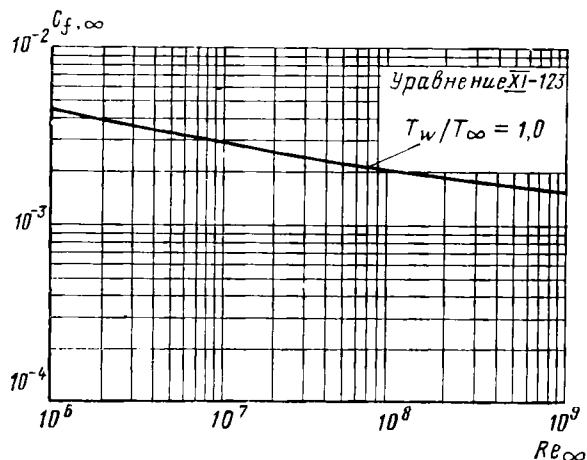


Рис. XI-15. Зависимость $C_{f,\infty}=f(\operatorname{Re}_{\infty})$ для $M_{\infty}=0$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

Формула для определения $C_{f,\infty}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{0,242}{A (C_{f,\infty})^{1/2} (T_w/T_{\infty})^{1/2}} (\arcsin \alpha + \arcsin \beta) = \\ = \log \operatorname{Re}_{\infty} C_{f,\infty} - \frac{1+2n}{2} \log T_w/T_{\infty}. \end{aligned} \quad (\text{XI-123})$$

Формула (XI-123) громоздка и неудобна для практического использования. Поэтому результаты расчета по формуле (XI-123) представляются в виде графиков.

На рис. XI-15 представлена зависимость среднего коэффициента трения $C_{f,\infty}$ на пластине, подсчитанного по параметрам свободного потока, — от критерия Рейнольдса $\operatorname{Re}_{\infty}$ для воздуха при $n=0,76$, $\kappa=1,4$, $M_{\infty}=0$, $T_w/T_{\infty}=1$.

На рис. XI-16 представлена та же зависимость при

$$M_{\infty}=2, \quad T_w/T_{\infty}=1, \quad T_w/T_{\infty}=1,8.$$

На рис. XI-17 представлена та же зависимость при

$$M_{\infty}=4, \quad T_w/T_{\infty}=1, \quad T_w/T_{\infty}=2,0, \quad T_w/T_{\infty}=3, \quad T_w/T_{\infty}=4$$

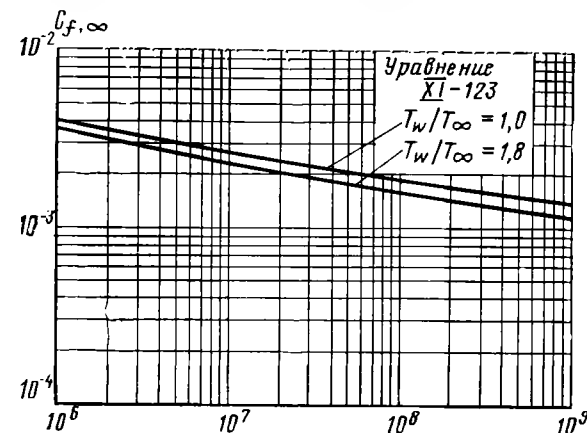


Рис. XI-16. Зависимость $C_{f,\infty}=f(\operatorname{Re}_{\infty})$ для $M_{\infty}=2$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

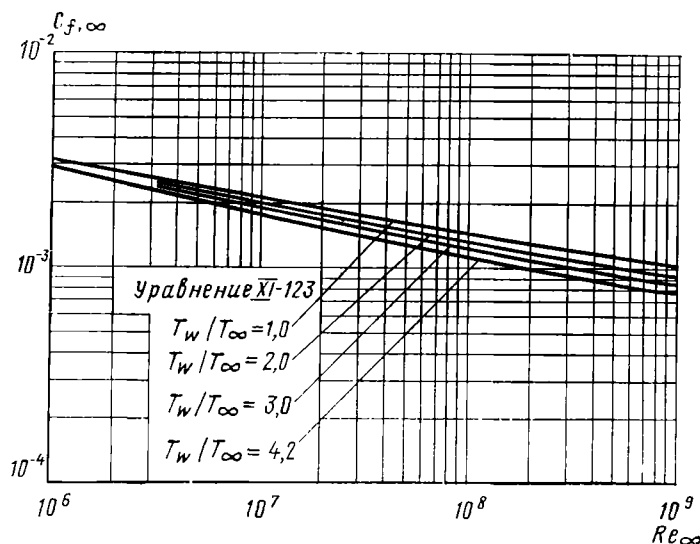


Рис. XI-17. Зависимость $C_{f,\infty}=f(\operatorname{Re}_{\infty})$ для $M_{\infty}=4$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

На рис. XI-18 представлена та же зависимость при

$$\begin{aligned} M_{\infty}=5, \quad T_w/T_{\infty}=1, \quad T_w/T_{\infty}=2,0, \quad T_w/T_{\infty}=4,0, \\ T_w/T_{\infty}=6 = T_{aw}/T_{\infty}. \end{aligned}$$

На рис. XI-19 представлена та же зависимость при

$$M_\infty = 6, T_w/T_\infty = 2,0, T_w/T_\infty = 4,0, T_w/T_\infty = 6,0, T_w/T_\infty = 8,2.$$

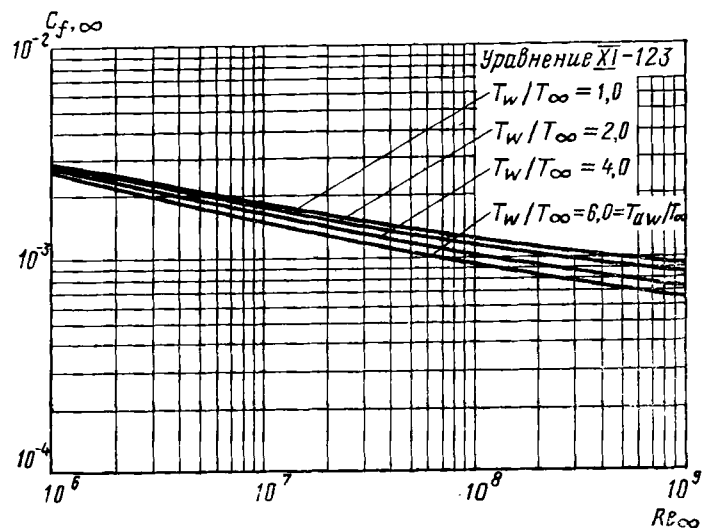


Рис. XI-18. Зависимость $C_{f,\infty} = f(Re_\infty)$ для $M_\infty = 5$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

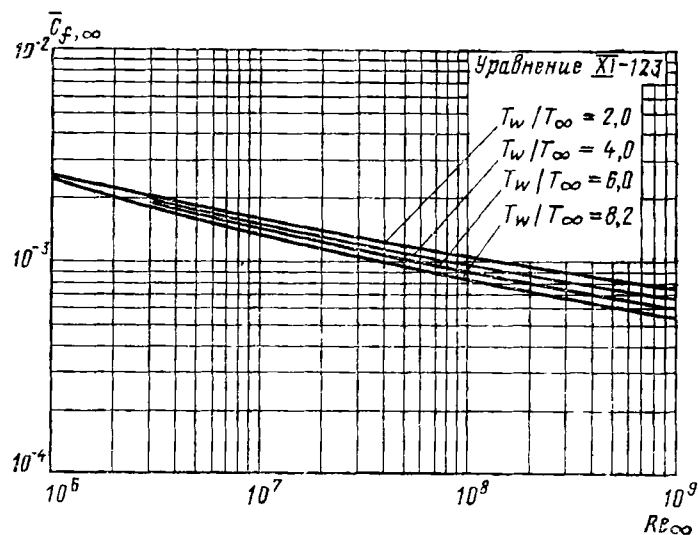


Рис. XI-19. Зависимость $C_{f,\infty} = f(Re_\infty)$ для $M_\infty = 6$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

На рис. XI-20 представлена та же зависимость при

$$M_\infty = 8, T_w/T_\infty = 2,0, T_w/T_\infty = 4, T_w/T_\infty = 6,0, T_w/T_\infty = 8,0, T_w/T_\infty = 13,8.$$

На рис. XI-21 представлена та же зависимость при

$$M_\infty = 10, T_w/T_\infty = 4,0, T_w/T_\infty = 6, T_w/T_\infty = 8, T_w/T_\infty = 12,0, T_w/T_\infty = 21,0.$$

Если теплоотдача к пограничному слою или от него не происходит, то уравнение (XI-23) с учетом (XI-43) можно представить в виде

$$\frac{0,242}{C_f^{1/2}} (1 - \gamma^2)^{1/2} \frac{\arcsin \gamma}{\gamma} = \log Re_\infty C_f + \frac{1 + 2n}{2} \log (1 - \gamma^2), \quad (XI-124)$$

где

$$1 - \gamma^2 = \{1 + [(K - 1)/2] M_\infty^2\}^{-1}.$$

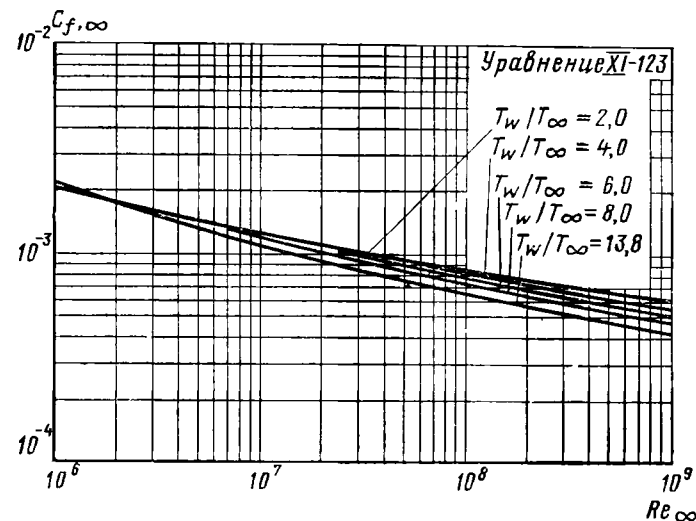


Рис. XI-20. Зависимость $C_{f,\infty} = f(Re_\infty)$ для $M_\infty = 8$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

На рис. XI-22 представлено графическое решение уравнения (XI-124) при $n = 0,76$ и $\kappa = 1,40$. Там же нанесены опытные точки, которые удовлетворительно согласуются с расчетными кривыми Ван Дрифта.

На этом же рисунке нанесена кривая, построенная по уравнению Кáрман (XI-122) для несжимаемого $M_\infty = 0$ турбулентного пограничного слоя. Кроме того, на этом рисунке представлены кривые для ламинарного пограничного слоя — несжимаемого [по уравнению Блазиуса (VII-28)] и сжимаемого [по уравнению Кáрман (XI-65)].

В заключение отметим, что основное допущение изложенного метода Ван Дрифта состоит в том, что как турбулентное число Прандтля $\frac{c_p \rho \epsilon_\sigma}{\epsilon}$, так и ламинарное $\frac{c_p \mu}{\lambda}$ принимаются равными единице. Такое допущение приводит к выводу о том, что для теплоизолированной пла-

стины полная энергия единицы массы газа $c_p T + \frac{\bar{w}_x^2}{2}$ постоянна по толщине пограничного слоя. Такой же вывод получен и для ламинарного слоя для случая $Pr = 1$.

В действительности число Прандтля для воздуха не равно единице, а составляет приблизительно 0,75. Если учесть этот факт, то для ламинарного слоя в случае теплоизолированной пластины можно аналитически установить, что относительная температура торможения $T_0/T_{0,\infty}$

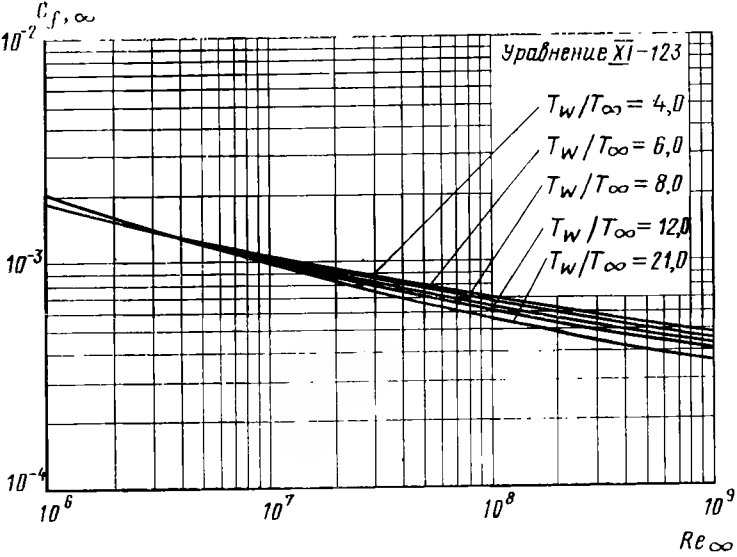


Рис. XI-21. Зависимость $C_{f,\infty}=f(Re_\infty)$ для $M_\infty=10$ в турбулентном пограничном слое воздуха на пластине [12]

по толщине слоя распределяется так, как показано на рис. XI-23. Из рисунка следует, что энергия переносится от пристеночных областей к внешней границе пограничного слоя.

Этот факт подтверждается экспериментально тем, что температура восстановления T_r для теплоизолированных пластин при $Pr = 1$ ниже температуры торможения свободного потока и коэффициент восстановления (XI-8) будет меньше единицы.

Для турбулентного пограничного слоя турбулентное число Прандтля отличается от единицы. Установлено, что турбулентный коэффициент восстановления $r_{тб}$ на теплоизолированной пластине в случае $Pr_{тб} < 1$ также меньше единицы и эту зависимость можно аппроксимировать следующей формулой (XI-8a):

$$r_{тб} = \sqrt[3]{Pr_{лам}}. \tag{XI-125}$$

На рис. (XI-24) представлена экспериментальная зависимость относительной температуры торможения $T_0/T_{0,\infty}$ по толщине турбулент-

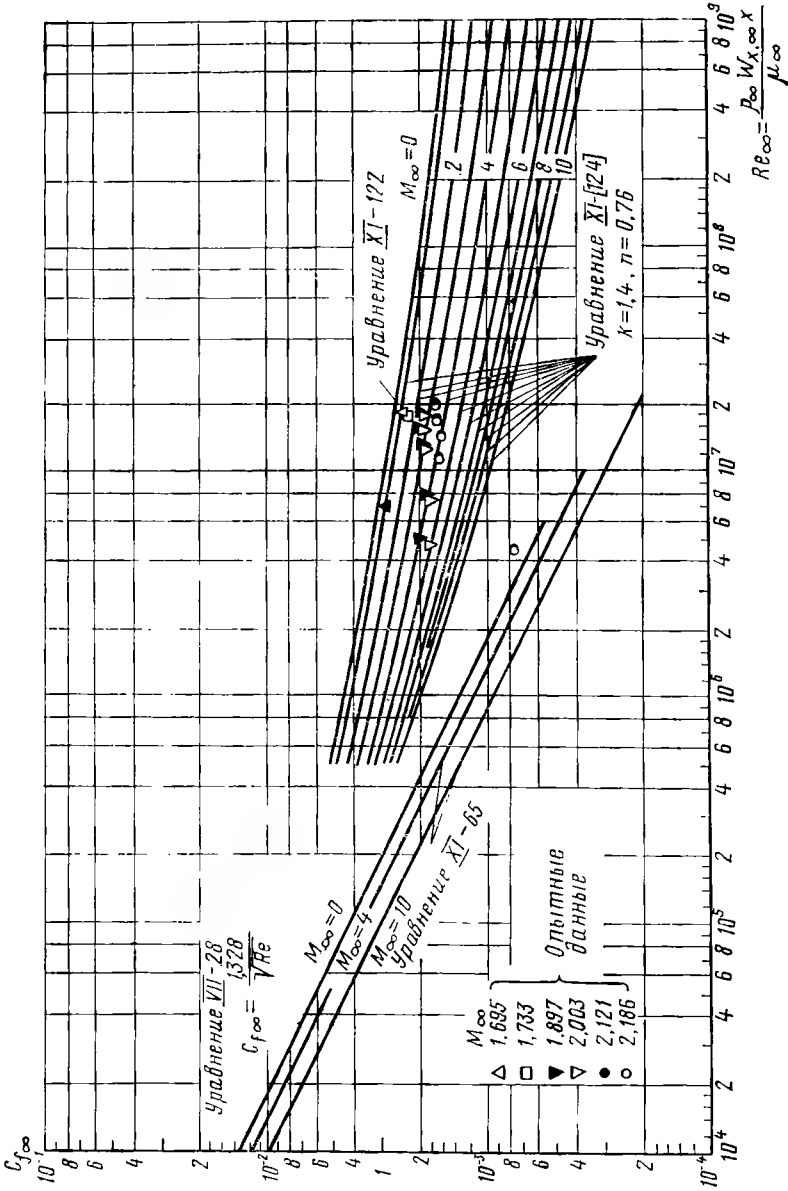


Рис. XI-22. Зависимость среднего турбулентного коэффициента трения $C_{f,\infty}$ от критериев Рейнольдса Re_∞ и Ma_∞ для теплоизолированной пластины [12]

ного пограничного слоя на стенке сверхзвуковой аэродинамической трубы. Сравнивая кривые, показанные на рис. XI-23 и XI-24, можно заметить, что они похожи и что допущение Ван Дрийдта о числе Прандтля, равном единице, более справедливо для турбулентного течения, чем для ламинарного.

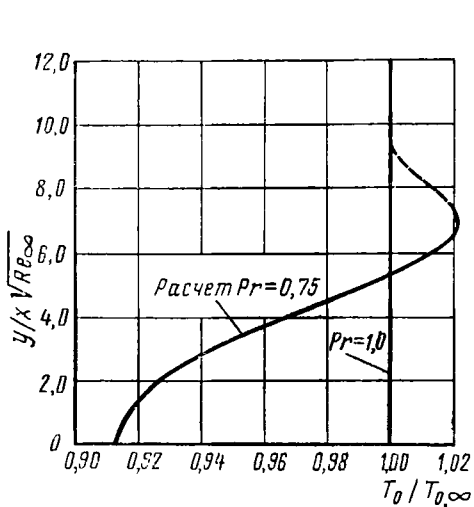


Рис. XI-23. Изменение относительной температуры торможения $T_0/T_{0,\infty}$ по толщине ламинарного пограничного слоя $y/x \sqrt{Re_\infty}$ при $M_\infty=3$:
 T_0 — температура торможения в пограничном слое, $T_{0,\infty}$ — температура торможения свободного потока

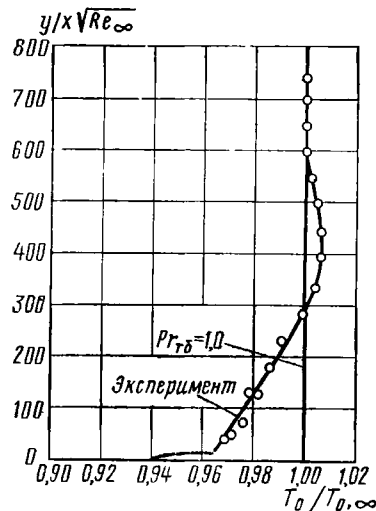


Рис. XI-24. Изменение относительной температуры торможения $T_0/T_{0,\infty}$ по толщине турбулентного пограничного слоя $y/x \sqrt{Re_\infty}$ при $M_\infty=2,8$

Итак, на данном уровне знаний о механизме переноса количества движения и теплоты в турбулентном пограничном слое рассмотренную методику Ван Дрийдта следует признать удовлетворительной.

§ 6. УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНИЯ C_f И ТЕПЛОТДАЧИ α В ТУРБУЛЕНТНОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ

На основании анализа экспериментальных данных Эккерт [91] сделал вывод о том, что можно с достаточной для инженерных расчетов точностью определить коэффициент трения C_f и теплоотдачи α для турбулентного пограничного слоя в сжимаемой жидкости по соответствующим формулам для несжимаемой жидкости, так же как это предлагалось делать для ламинарного слоя в § 3 настоящей главы.

Сущность методики, изложенной в указанном параграфе, сохраняется и для рассматриваемого случая, поэтому она не будет здесь излагаться. Опишем здесь только ход расчета.

Для вычисления коэффициентов трения локального $c_{f\infty}$ или среднего $C_{f\infty}$ коэффициентов восстановления $r_{тб}$ и теплоотдачи α в турбулентном пограничном слое сжимаемой жидкости следует использовать формулы, полученные для несжимаемой жидкости в предположении постоянства ее физических констант:

для локального коэффициента трения формулу (VII-92)

$$\frac{\tau_w}{\rho W_{x,\infty}^2} = \frac{1}{2} c_f = \frac{0,0296}{(Re_\infty)^{0,2}},$$

дающую удовлетворительные результаты до $Re = 10^7$; или формулы (VII-99) для локального коэффициента трения

$$c_f = \frac{0,370}{(\log Re_\infty)^{2,584}} \quad (XI-126)$$

и Прандтля — Шлихтинга (VII-98) для среднего значения коэффициента трения

$$C_f = \frac{0,455}{(\log Re_\infty)^{2,58}} \quad (XI-127)$$

Обе они дают хорошие результаты до чисел Рейнольдса, равных $Re_\infty = 10^9$;

для коэффициента восстановления формулу

$$r_{тб} = \sqrt[3]{Pr};$$

для коэффициента теплоотдачи формулы

$$St_\infty = \frac{c_{f\infty}}{2} \frac{1}{Pr^{2/3}}, \quad \overline{St}_\infty = \frac{C_{f\infty}}{2} \frac{1}{Pr^{2/3}}. \quad (XI-128)$$

Значения физических констант жидкости, используемых в перечисленных формулах, следует брать по эталонной температуре, которую подсчитывают по формуле (XI-69).

Если теплоемкость жидкости изменяется по толщине пограничного слоя значительно, то коэффициент восстановления r и число St должны определяться по эталонной энтальпии (XI-75), так же как это предлагалось делать для ламинарного слоя в § 4 настоящей главы.

§ 7. ТЕПЛО- И МАССООБМЕН С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ В ДИССОЦИИРОВАННОМ ГАЗЕ

При взаимодействии тел с потоками газа высокой температуры ($T > 3000^\circ K$) необходимо учитывать влияние диссоциации на теплоотдачу. Такие условия могут возникать, например, в камерах сгорания и соплах ракетных двигателей или при полете тел с очень большими скоростями.

При полете тела с большой скоростью ($M > 10$) температура воздуха перед его головной частью достигает очень высоких значений, при

этом происходят явления диссоциации и ионизации, изменяются физические свойства и состав воздуха. Существенно изменяются вязкость, теплопроводность, испускание*, электропроводность и сжимаемость.

Диссоциация воздуха приводит к появлению в его составе атомарных кислорода (O) и азота (N), окиси (NO) и двуокиси (NO₂) азота.

Ионизация воздуха приводит к появлению в нем ионов (N⁺, O⁺) и свободных электронов (e⁻). На рис. XI-25 приведены кривые изменения концентрации молекул и ионов воздуха в зависимости от температуры. Состав воздуха определен теоретически. Как видно из рис.

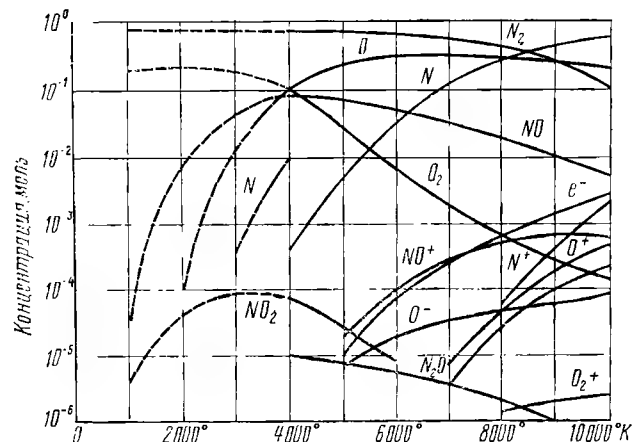


Рис. XI-25. Концентрация различных молекул и ионов в воздухе в зависимости от температуры (плотность на уровне моря и химическое равновесие)

XI-25, состав воздуха зависит от температуры, и при высокой температуре ($T > 3000^\circ \text{K}$) он представляет собой химически реагирующую смесь газов.

Основное влияние процессов диссоциации и ионизации состоит в снижении температуры воздуха за ударной волной (вниз по потоку), так как на эти процессы затрачивается кинетическая энергия молекул. Для оценки порядка величины снижения температуры приведем следующий пример: при максимальной пиковой температуре в $20\,000^\circ \text{K}$, возникающей при проходе воздуха сквозь поверхность ударной волны, равновесная температура на некотором расстоянии ниже волны составляет всего 7000°K . На рис. XI-26 приведены для сравнения кривые изменения температуры в критической точке теплоизолированного тела с притупленным носком при его полете в двух атмосферах: в диссоциированном и ионизированном воздухе (реальный газ) и в воздухе без учета названных процессов (идеальный газ).

* И с п у с к а н и е — процесс возникновения излучения вследствие превращения внутренней энергии излучающего тела (среды) в энергию излучения [74].

Процесс переноса теплоты в ламинарном пограничном слое диссоциированного воздуха отличается от соответствующего процесса в недиссоциированном (обычном) воздухе (гл. XI, § 1).

В ламинарном пограничном слое обычного воздуха теплота переносится теплопроводностью и плотность теплового потока определяют по закону Фурье (I-3)

$$q = -\lambda \text{grad } T \equiv -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}.$$

В ламинарном пограничном слое диссоциированного воздуха также происходит перенос теплоты теплопроводностью, но здесь возможен дополнительный сверх q (по I-3) перенос теплоты. Рассмотрим некоторые механизмы дополнительного переноса теплоты. Пусть температура стенки T_w меньше температуры восстановления $T_{r,\infty}$ (XI-12), т. е. стенка холодная, тогда у ее поверхности возможна экзотермическая реакция рекомбинации атомов в молекулы, которая приводит к росту температуры газа у стенки. Если будет происходить непрерывный приток атомов к стенке, а у ее поверхности непрерывно поддерживаться экзотермическая реакция рекомбинации, то в результате будет осуществляться дополнительный перенос теплоты. Перечисленные процессы составляют один из возможных механизмов дополнительного переноса теплоты в ламинарном пограничном слое диссоциированного воздуха. Одновременно с описанным механизмом могут действовать и другие.

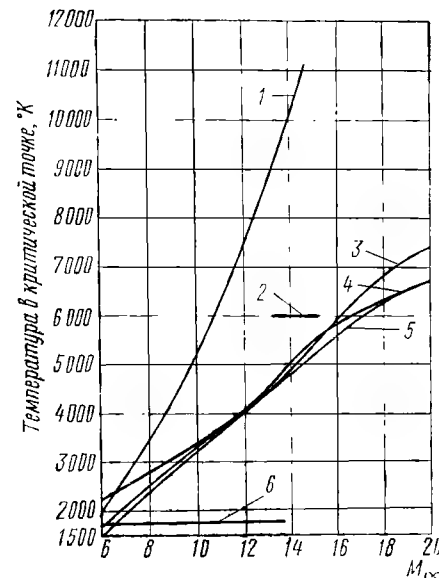


Рис. XI-26. Зависимость максимальной температуры у изолированной поверхности тупого носка от числа Маха:

1 — идеальный газ, высота 37 км, 2 — температура поверхности Солища, 3 — реальный газ, высота 18 км, 4 — реальный газ, высота 37 км, 5 — реальный газ, высота 55 км, 6 — температура плавления железа

Массообмен

Рассмотрим процесс переноса атомов из внешнего потока к стенке. У стенки происходит реакция рекомбинации атомов, и их концентрация здесь становится меньше, чем во внешнем потоке. Значит можно выделить тонкий слой газа между стенкой и внешним потоком с неоднородным полем концентрации атомов. Отметим, что диссоциированный воздух является частным случаем химически реагирующей смеси газов. Рассмотрим далее некоторые процессы в произвольных смесях газов, которые возможны и в воздухе. Известно, что в объеме, занятом

смесью газов с неоднородным полем концентрации некоторого компонента, происходит самопроизвольное перемещение массы этого компонента из области, где его концентрация больше, в область, где она меньше.

В нашем случае концентрация атомов у стенки меньше, поэтому они будут перемещаться от внешнего потока к стенке, а концентрация молекул здесь больше, и они будут перемещаться от стенки к внешнему потоку. Перемещение микрочастиц прекратится, если поле концентрации станет однородным. Самопроизвольный необратимый процесс переноса массы данного компонента в пространстве, в простейшем случае с неоднородным полем концентрации или парциального давления этого компонента, называют *м а с с о о б м е н о м*.

Массообмен может быть молекулярным или конвективным. Перенос вещества в смеси, обусловленный тепловым движением микрочастиц, называют *м о л е к у л я р н о й д и ф ф у з и е й*.

Молекулярная диффузия, вызываемая неоднородным распределением концентрации компонентов смеси, называется *к о н ц е н т р а ц и о н н о й д и ф ф у з и е й*.

Массообмен, обусловленный совместным действием конвективного переноса вещества и молекулярной диффузии, называют *к о н в е к т и в н ы м м а с с о о б м е н о м*.

Тонкий слой газа, характеризующийся большим поперечным градиентом концентрации данного компонента в смеси, под действием которого (градиента) осуществляется поперечный перенос этого компонента, называют *д и ф ф у з и о н н ы м п о г р а н и ч н ы м с л о е м* [74].

Градиент концентрации поперек пограничного слоя может возникнуть не только в результате реакции рекомбинации атомов в молекулы у стенки, но и по другим причинам. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть вещество стенки является химически активным и может вступать в реакцию с одним из компонентов смеси газов — это приведет к уменьшению концентрации этого компонента у стенки и к возникновению градиента концентрации.

Рассмотрим еще один случай. Пусть вещество стенки является химически нейтральным и не вступает в реакции ни с одним из компонентов смеси газа. Однако в самом пограничном слое могут происходить химические реакции между отдельными компонентами. Предположим, что один из компонентов смеси так реагирует с другими, что его концентрация по мере приближения к стенке уменьшается. В этих условиях также возникает градиент концентрации.

В обоих рассмотренных случаях градиент концентрации обусловит поток массы данного компонента к стенке. Допустим, что температура внешнего потока T_∞ больше температуры стенки T_w , тогда поток массы, обусловленный концентрационной диффузией, может переносить теплоту от внешнего потока к стенке. Так можно объяснить еще один из возможных механизмов дополнительного переноса теплоты в пограничном слое химически реагирующего газа.

Теперь перейдем к обсуждению способа определения величины диффузионного потока массы.

Плотность потока массы при концентрационной диффузии, т. е. диффузионный поток количества вещества (в кг массы), переносимого через единицу площади в единицу времени j , определяют по закону Фика, который можно представить в следующей форме:

$$j = -D \operatorname{grad} \rho_i \equiv -D \frac{\partial \rho_i}{\partial y}, \quad (\text{XI-129})$$

где D — коэффициент диффузии, физическая константа;

ρ_i — концентрация диффундирующего вещества i -го компонента смеси. Совпадает по величине с его локальной плотностью.

В общем случае в ламинарном пограничном слое химически реагирующей смеси газов действуют одновременно градиент температуры и градиенты концентраций компонентов. Поэтому необходимо рассмотреть совместно законы Фурье и Фика.

Прежде всего отметим, что эти законы в форме (I-3) и (XI-129) можно применять для ограниченного числа процессов переноса теплоты и массы.

По закону Фурье можно определить молекулярный перенос теплоты, обусловленный градиентом температуры только в неподвижной среде.

По закону Фика можно определить молекулярный перенос массы компонентов смеси газа, обусловленный градиентом концентрации, когда смесь в целом неподвижна.

Оба закона нельзя применять в условиях очень малой плотности газа, когда длина свободного пробега молекул оказывается больше характерного размера обтекаемого тела.

Закон Фурье справедлив для жидкости с однородным полем концентрации. Для определения теплового потока в пограничном слое, в котором наряду с градиентом температуры имеются градиенты концентрации, формулу закона Фурье (I-3) следует дополнить членами, учитывающими дополнительный перенос теплоты; в наших дальнейших исследованиях мы ограничимся только одним членом, который будет учитывать перенос теплоты диффузией; механизмы такого переноса были описаны выше.

Закон Фика справедлив для жидкости с однородным полем температуры (изотермические процессы) при условиях *независимой диффузии*. Условия независимой диффузии соблюдаются в каждом следующем случае:

смесь состоит только из двух компонентов или одного диффундирующего и смеси постоянного состава; диффузионный процесс, происходящий в этих условиях, называют *б и н а р н о й д и ф ф у з и е й*;

разбавленная смесь, в которой доля (например, объемная) одного из компонентов велика по сравнению с долями других, причем поле ее концентрации в смеси является однородным;

коэффициенты диффузии всех компонентов смеси равны между собой [84].

В реальных условиях в многокомпонентной реагирующей смеси тепловой поток и диффузионные потоки оказывают взаимное влияние

друг на друга. Задача теоретического определения теплового потока и всех диффузионных оказывается очень сложной и не всегда разрешимой. В наших дальнейших исследованиях будем использовать допущение о возможности протекания бинарной диффузии в многокомпонентной смеси, для этого разобьем все микрочастицы смеси на два сорта — легкие и тяжелые. В бинарной смеси существует один общий коэффициент взаимной диффузии $D_{12} = D_{21}$. Далее для анализа процессов тепло- и массообмена между химически реагирующим газом и твердым телом используем систему уравнений пограничного слоя.

Уравнения сжимаемого ламинарного пограничного слоя в химически реагирующем газе

Приведем здесь названную систему уравнений. С выводом этих уравнений можно познакомиться в специальной литературе [16, 27].

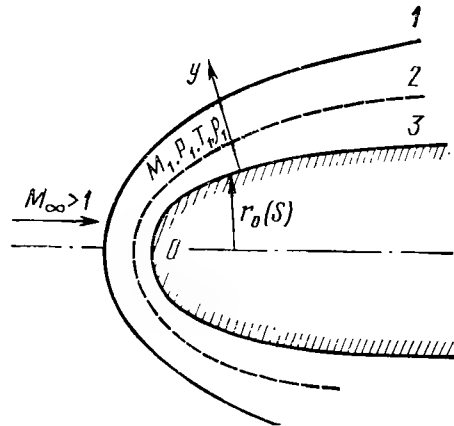


Рис. XI-27. Ударная волна и пограничный слой при обтекании тупого носка:

1 — ударная волна, 2 — невязкий слой, 3 — пограничный слой

Уравнение движения в проекции на направление s (рис. XI-27) напишем на основании (XI-17); так как ни химические реакции, ни диссоциация не создают импульса, то

$$\rho \omega_s \frac{\partial \omega_s}{\partial s} + \rho \omega_y \frac{\partial \omega_s}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \right) \quad (\text{XI-130})$$

и в проекции на ось y (см. рис. XI-27) в соответствии с (XI-17) получим

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad p = p_1. \quad (\text{XI-131})$$

Уравнение сплошности для смеси напишем на основании (XI-18)

$$\frac{\partial (\rho \omega_s)}{\partial s} + \frac{\partial (\rho \omega_y)}{\partial y} = 0. \quad (\text{XI-132})$$

Уравнение сохранения массы i -го компонента имеет вид

$$\rho \omega_s \frac{\partial C_i}{\partial s} + \rho \omega_y \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + w_i. \quad (\text{XI-133})$$

Здесь D_{12} — коэффициент бинарной диффузии;

$C_i = \rho_i / \rho$ — относительная концентрация i -го компонента;

ω_i — скорость массообмена i -го компонента на единицу объема, или скорость возникновения i -го компонента; при любых химических превращениях суммарная масса реагирующих веществ остается неизменной, поэтому $\sum \omega_i = 0$.

Уравнение состояния.

$$p = \sum_i p_i = \rho R_{cm} T; \quad R_{cm} = \sum C_i R_i. \quad (\text{XI-134})$$

Парциальное давление компонента находят из выражения

$$p_i = \rho_i \frac{K}{m_i} T, \quad (\text{XI-135})$$

где K — константа Больцмана;

m_i — масса молекулы i -го компонента.

Уравнение энергии.

$$\begin{aligned} \rho \omega_s \frac{\partial h}{\partial s} + \rho \omega_y \frac{\partial h}{\partial y} &= w_s \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \sum h_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{XI-136})$$

Сравним уравнение энергии (XI-136) с уравнением энергии (XI-19), причем в последнем заменим $c_p \partial T$ на ∂h . Сравнение показывает, что в (XI-136) появился новый член (третий в правой части), который учитывает перенос теплоты диффузией.

Уравнение энергии можно представить в другой форме

$$\begin{aligned} \rho \omega_s \frac{\partial I}{\partial s} + \rho \omega_y \frac{\partial I}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial I}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{Le} - 1 \right) \rho D_{12} \sum h_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (\text{XI-137})$$

где

$$I = h + \frac{\omega_s^2}{2}; \quad (\text{XI-138})$$

$$h = \sum_i C_i h_i; \quad (\text{XI-139})$$

$$h_i = \int_0^T c_{p,i} dT + h_i^0; \quad (\text{XI-140})$$

h_i^0 — теплота образования i -го компонента при температуре 0°K ;

$Pr = \frac{c_{p,f} \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$ — число Прандтля;

$$c_{p,f} = \sum C_i \frac{dh_i}{dT} = \sum C_i c_{p,i}; \quad (\text{XI-141})$$

$$Le = \frac{\rho D_{12} c_{p,f}}{\lambda} = \frac{D_{12}}{a} \text{ — число Льюиса;} \quad (\text{XI-142})$$

в названных уравнениях

$$\mu = \mu(C_i, T), \quad \lambda = \lambda(C_i, T), \quad D_{12} = D_{12}(T) \quad \text{и} \quad \rho = \rho_1(s).$$

Сравним уравнение энергии (XI-137) с уравнением энергии (XI-22). Сравнение показывает, что в (XI-137) появился новый член (второй в правой части), который учитывает перенос теплоты диффузией.

Граничные условия для системы уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя в химически реагирующем газе имеют вид:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при} & \text{при} \\ y=0 & y \rightarrow \infty \\ \rho = \rho_w & \rho \rightarrow \rho_1 \\ T = T_w & T \rightarrow T_1 \\ h = h_w & h \rightarrow h_1 \\ I = I_w & I \rightarrow I_1 \\ w_s = 0 & w_s \rightarrow w_{s1} \\ w_y = 0 & w_y \rightarrow 0 \\ C_i = C_{iw} & C_i \rightarrow C_{i1} \end{array} \right\} \quad (\text{XI-143})$$

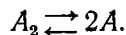
Тепловой поток в ламинарном пограничном слое идеального диссоциирующего газа

при $\partial p / \partial x = 0$.

Определим тепловой поток к пластине, обтекаемой диссоциирующим газом. Для упрощения этой задачи будем рассматривать теплоотдачу не в реальной смеси реагирующих газов, а в идеально диссоциирующем газе. Таким газом называют смесь, состоящую только из двух следующих компонентов:

молекул A_2 с массой m_m и атомов A с массой m_a , причем $m_m = 2 m_a$.

Кроме того, в этом газе может протекать только реакция вида



Приведенная выше система уравнений пограничного слоя в смеси химически реагирующих газов (XI-130, XI-131, XI-132, XI-133, XI-137 и XI-143) остается справедливой и для идеально диссоциирующего газа. Это объясняется тем, что идеально диссоциирующий газ является простейшим частным случаем смеси химически реагирующих газов.

Введем следующие обозначения для идеально диссоциирующего газа:

$\alpha = \frac{\rho_a}{\rho}$ — концентрация атомов,

$1 - \alpha = \frac{\rho_m}{\rho}$ — концентрация молекул.

Покажем, как будет выглядеть уравнение энергии пограничного слоя (XI-136) с учетом принятых обозначений

$$\rho w_s \frac{\partial h}{\partial s} + \rho w_y \frac{\partial h}{\partial y} = w_s \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D_{12} (h_a - h_m) \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (\text{XI-144})$$

где

$$h = \alpha h_a + (1 - \alpha) h_m; \quad (\text{XI-145})$$

$$h_a = \int_0^T c_{pa} dT + h_a^0; \quad (\text{XI-146})$$

$$h_a^0 = \frac{D}{2m_a};$$

D — энергия диссоциации одной молекулы в идеально диссоциирующем газе;

$$h_m = \int_0^T c_{pm} dT + h_m^0; \quad (\text{XI-147})$$

$h_a^0 = 0$, так как на образование молекул в идеально диссоциирующем газе энергия не затрачивается.

Другие уравнения пограничного слоя в химически реагирующем газе для частного случая — идеально диссоциирующего воздуха либо сохраняются без изменения, либо отличаются только тем, что в них вместо концентрации i -го компонента C_i фигурирует концентрация, например атомов α , поэтому они здесь приводиться не будут.

Сравним уравнение энергии пограничного слоя в идеально диссоциирующем газе (XI-144) с уравнением энергии в недиссоциирующем газе (XI-19), заменив в последнем $c_p \partial T$ на ∂h . Сравнение показывает, что в (XI-144) появился новый член (второй в правой части), связанный с переносом энергии вследствие диффузии.

Перейдем к определению теплового потока. Эту величину в ламинарном пограничном слое недиссоциирующего газа находят по закону Фурье (I-3)

$$-q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Тепловой поток в ламинарном пограничном слое идеального диссоциирующего газа можно представить в следующей форме:

$$-q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D_{12} (h_a - h_m) \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \quad (\text{XI-148})$$

Разность энтальпий двух компонентов атомов h_a и молекул h_m с учетом (XI-146) и (XI-147) можно записать в следующем виде:

$$h_a - h_m = h_a^0 + \int_0^T (c_{pa} - c_{pm}) dT. \quad (XI-149)$$

Известно, что

$$h_a^0 \gg \int_0^T (c_{pa} - c_{pm}) dT, \quad (XI-150)$$

поэтому (XI-148) будет иметь вид

$$-q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D_{12} h_a^0 \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \quad (XI-151)$$

Допустим, что концентрация атомов в любом элементарном объеме пограничного слоя зависит только от температуры, т. е. $\alpha = \alpha(T)$. Тогда можно написать

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{d\alpha}{dT} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (XI-152)$$

Совмещая (XI-151) и (XI-152), получим

$$-q = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho D_{12} h_a^0 \frac{d\alpha}{dT} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad (XI-153)$$

последнее выражение можно представить в другой форме

$$-q = (\lambda + \lambda_r) \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (XI-154)$$

где

$$\lambda_r = \rho D_{12} h_a^0 \frac{d\alpha}{dT}. \quad (XI-155)$$

Величину λ_r называют коэффициентом теплопроводности, обусловленным химическими реакциями. Сумму $(\lambda + \lambda_r)$ называют кажущимся коэффициентом теплопроводности.

Если в уравнение энергии (XI-144) ввести вместо λ сумму $(\lambda + \lambda_r)$, то из него выпадет член, связанный с переносом энергии диффузией (второй в правой части). Полученное таким образом уравнение энергии пограничного слоя в диссоциирующем газе по форме не будет отличаться от уравнения энергии для пограничного слоя в недиссоциирующем газе (XI-19). Ранее было установлено, что решение уравнений несжимаемого ($\rho = \text{const}$) пограничного слоя для нереагирующего газа (VII-48) можно представить в следующей форме:

$$\text{St} = \frac{c_f}{2} (\text{Pr})^{-\frac{2}{3}}. \quad (XI-156)$$

Оно остается справедливым и для сжимаемого газа (гл. XI, § 3).

На основании (VII-47) тепловой поток к стенке от недиссоциирующего газа можно представить в виде

$$-q = \frac{c_f}{2} \rho_1 w_1 \text{Pr}^{-\frac{2}{3}} (I_r - h_w), \quad (XI-157)$$

где $I_r = h_1 + r \frac{w_1^2}{2}$ — энтальпия восстановления;

h_1 и h_w — энтальпия на внешней кромке пограничного слоя и при температуре стенки;

$r = \sqrt{\text{Pr}}$ — коэффициент восстановления;

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (XI-158)$$

— число Прандтля, зависящее от состава и параметров газовой смеси.

Решение системы уравнений пограничного слоя в идеально диссоциирующем газе можно представить в форме, аналогичной (XI-156), так как эта система не отличается от системы уравнений в недиссоциирующем газе, когда в последней λ заменена суммой $(\lambda + \lambda_r)$.

Итак, решение уравнений пограничного слоя в идеально диссоциирующем газе можно представить в виде

$$\text{St} = \frac{c_f}{2} (\text{Pr}_{1,q})^{-\frac{2}{3}}, \quad (XI-159)$$

где $\text{Pr}_{1,q} = \frac{c_p \mu}{\lambda + \lambda_r}$ — число Прандтля, зависящее от поля течения состава и параметров газовой смеси.

Тепловой поток от идеально диссоциирующего газа на основании (VII-47) и (XI-157) можно представить в форме

$$-q = \frac{c_f}{2} \rho_1 w_1 (\text{Pr}_{1,q})^{-\frac{2}{3}} (I_r - h_w). \quad (XI-160)$$

После некоторых преобразований выражение (XI-160) имеет вид [27]

$$-q = \frac{c_f}{2} \rho_1 w_1 \text{Pr}^{-2/3} (I_r - h_w) \times \left[1 + (\text{Le} - 1) \frac{(\alpha_1 - \alpha_w) h_a^0}{I_r - h_w} \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (XI-161)$$

Сравнивая выражения (XI-157) и (XI-161), замечаем, что в последнем появился дополнительный сомножитель (в квадратных скобках), который отражает влияние диссоциации на теплоотдачу при продольном обтекании пластины.

**Влияние диссоциации на теплоотдачу в пограничном слое
идеально диссоциирующего газа при $\partial p / \partial x = 0$**

Влияние диссоциации на теплоотдачу можно выяснить, проведя анализ выражения для теплового потока (XI-161) в пограничном слое идеально диссоциирующего газа. Анализируя уравнение диффузии (XI-143), найдем

$$\delta'_c \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Pe}_d}}, \quad (\text{XI-162})$$

где $\delta'_c = \frac{\delta_c}{l}$ — толщина диффузионного пограничного слоя;

l — характерный размер тела;

$$\text{Pe}_d \equiv \frac{w_1 l}{D_{12}} \equiv \text{Re}_1 \text{Pr}_d \quad (\text{XI-163})$$

— диффузионное число Пекле;

$$\text{Re}_1 \equiv \frac{w_1 l}{\nu} \text{ — число Рейнольдса.}$$

На основании (VII-8) можно написать соотношение для толщины динамического пограничного слоя

$$\delta' \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_1}}, \quad (\text{XI-164})$$

а на основании (VII-34) — для толщины теплового пограничного слоя

$$\Delta' \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Pe}_1}}, \quad (\text{XI-165})$$

где

$$\text{Pe}_1 \equiv \frac{w_1 l}{a} \text{ — число Пекле.} \quad (\text{XI-166})$$

Сопоставляя (XI-162) и (XI-164), найдем соотношение между толщинами диффузионного δ_c и динамического δ пограничных слоев

$$\frac{\delta_c}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}_d}}; \quad (\text{XI-167})$$

соотношение для толщин теплового Δ и динамического δ пограничных слоев дано в выражении (XI-44).

Ранее было доказано, что уравнения движения и энергии (VII-35) в безразмерных величинах при условии $\frac{1}{\text{Re}} = \frac{1}{\text{Pe}}$ становятся тождественными, при этом относительные распределения скорости и температуры тождественны.

Можно доказать, что для течения вдоль пластины при условии $\frac{1}{\text{Re}} = \frac{1}{\text{Pe}} = \frac{1}{\text{Pe}_d}$ или при $\nu = a = D_{12}$ абсолютные распределения скорости,

температуры и концентрации (например, атомов α) подобны, а относительные распределения этих величин тождественны. Иногда говорят, что в этих условиях существует *тройная аналогия*, так как процессы переноса количества движения, теплоты и массы подобны между собой.

В различных случаях диссоциация по-разному влияет на величину теплового потока. Рассмотрим некоторые характерные случаи.

Случай, когда число Льюиса (XI-142) равно единице

$$\text{Le} \equiv \frac{\rho D_{12} c_{p,f}}{\lambda} \equiv \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_d} = 1,$$

где $\text{Pr} = \frac{c_{p,f} \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$ — число Прандтля;

$$\text{Pr}_d \equiv \frac{\mu}{\rho D_{12}} = \frac{\nu}{D_{12}} \text{ — диффузионное число Прандтля.}$$

При $\text{Le} = 1$ или $a = D_{12}$ из уравнения (XI-161) выпадает член, заключенный в квадратные скобки, который обусловлен явлением диссоциации. При $a = D_{12}$ относительные распределения температуры и концентрации поперек пограничного слоя тождественны. Если в этих условиях на стенке не происходит реакции рекомбинации атомов в молекулы, то интенсивность переноса теплоты теплопроводностью и диффузионным потоком массы одинакова, здесь имеется в виду только концентрационная диффузия. Другими словами: диффузионный поток массы не вызывает дополнительного переноса теплоты к тому количеству, которое переносится теплопроводностью.

Если поверхность пластины каталитическая*, то на ней может происходить экзотермическая реакция рекомбинации атомов в молекулы, что приводит к дополнительному переносу теплоты. Этот дополнительный перенос учитывается членом $(I_r - h_w)$ в (XI-161). Поясним это. На основании (XI-138) и (XI-145) разность энтальпий $(I_r - h_w)$ можно представить в форме

$$I_r - h_w = (h_a - h_m)_1 \alpha_1 + (h_m)_1 + \\ + r \frac{w_1^2}{2} - (h_a - h_m)_w \alpha_w + (h_m)_w.$$

Ранее было принято

$$(h_a - h_m)_1 \approx h_a^0 \approx (h_a - h_m)_w,$$

поэтому

$$I_r - h_w \approx h_a^0 (\alpha_1 - \alpha_w) + (h_m)_1 - \\ - (h_m)_w + r \frac{w_1^2}{2}. \quad (\text{XI-168})$$

* Поверхность тела (стенки), на которой протекает каталитическая реакция в химически реагирующей смеси, соприкасающейся с поверхностью, называют *каталитической* [74].

Первый член уравнения (XI-168) учитывает влияние диссоциации на теплоотдачу как при условии $Le = 1$, так и при $Le \neq 1$. Отметим, что диссоциирующему воздуху соответствует число Льюиса, равное 1,4.

Случай, когда $\alpha_1 = \alpha_w$, т. е. поля концентрации атомов и молекул в пограничном слое являются однородными, концентрационной диффузии не происходит. При $\alpha_1 = \alpha_w$ из (XI-161) выпадает член в квадратных скобках, а из (XI-168) первый член, в обоих случаях эти члены обусловлены диссоциацией, следовательно, в этих условиях диссоциация практически не оказывает влияния на теплоотдачу. В уравнении (XI-161) не учитывается влияние степени диссоциации на переносные свойства газовой смеси, например, на число Прандтля, но это не приводит к ощутимым ошибкам, так как это влияние мало.

§ 8. ТЕПЛОТДАЧА В ПЕРЕДНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ

При обтекании тела сверхзвуковым потоком газа (см. рис. XI-27) перед ним возникает головная ударная волна 1. Она представляет собой поверхность разрыва, при прохождении через которую поток газа скачком меняет свои параметры определенным образом, так что составляющие скорости, касательные к поверхности разрыва, остаются непрерывными. На поверхности разрыва выполняются законы сохранения массы, количества движения и энергии. В области потока 2 между ударной волной и внешней кромкой пограничного слоя влияние вязкости не учитывают; эту область 2 называют невязким слоем. На поверхности обтекаемого тела возникает пограничный слой 3.

Сверхзвуковая скорость невозмущенного потока W_∞ , проходящего сквозь поверхность ударной волны, скачкообразно падает и становится дозвуковой W .

Сверхзвуковой поток перед ударной волной считают невязким. За ударной волной имеется область дозвукового течения — она ограничена поверхностью тела, ударной волной и звуковой поверхностью. На рис. XI-28 показана область дозвукового течения при обтекании сферы сверхзвуковым потоком воздуха [8].

Для определения газодинамических параметров на внешней границе пограничного слоя решают газодинамическую задачу — вначале определяют положение и форму отошедшей ударной волны (можно взять эти сведения из эксперимента), затем находят поле гидродинамических параметров за ударной волной вплоть до поверхности тела. Найденные таким образом параметры на поверхности тела принимают за исходные на внешней границе пограничного слоя и обозначают M_1 , p_1 , T_1 , ρ_1 .

Значения параметров на внешней границе пограничного слоя служат граничными условиями для уравнений пограничного слоя. Граничные условия на поверхности тела находят так же, как и для случая дозвукового обтекания.

Газодинамическая задача об определении положения и формы ударной волны и поля параметров между ударной волной и поверхностью тела по своей сложности и трудоемкости оказывается соизмеримой с

задачей о пограничном слое. Метод решения газодинамической задачи на электронно-вычислительных машинах для идеального газа ($p = \rho RT$) разработан академиком А. А. Дородницким и чл. корр. АН СССР О. М. Белоцерковским [26, 8]. Этот метод изучается в курсах аэродинамики [41] и здесь рассматриваться не будет.

Исследования показали, что в окрестности передней критической точки O (рис. XI-27), где всегда существует дозвуковое течение, скорость потока W_s будет возрастать по мере удаления от нее по закону $W_s = u_1 s$, т. е. так же, как в случае обтекания тела дозвуковым по-

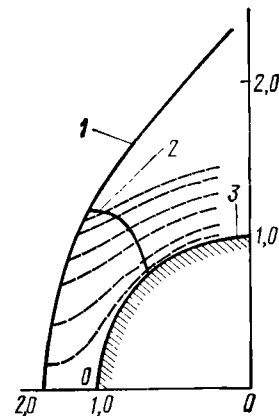


Рис. XI-28. Положение и форма ударной волны 1, звуковой линии 2 и линий тока (штрихи) для числа $M_\infty = 2$ при обтекании поверхности сферы 3 [8]

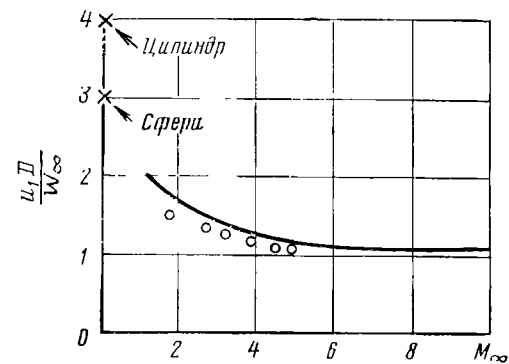


Рис. XI-29. Зависимость $\frac{u_1 D}{W_\infty} = f(M_\infty)$ безразмерного градиента скорости от числа Маха в окрестности критической точки при обтекании сферы; точками обозначены экспериментальные данные для обтекания полусферической головной части тела [102]

током (VIII-2). Здесь s — координата от точки O вдоль поверхности обтекаемого тела. Однако в рассматриваемом случае градиент скорости u_1 является функцией числа Маха невозмущенного потока M_∞ .

Для расчета теплоотдачи в окрестности критической точки при натекании сверхзвукового потока на преграду при ламинарном пограничном слое можно использовать формулы, полученные для случая натекания на преграду дозвукового потока, например, (VIII-29) или (VIII-30), если в них подставлять градиент скорости u_1 , возникающей при сверхзвуковом обтекании, а скорость невозмущенного потока брать сразу за ударной волной (вниз по потоку).

На рис. XI-29 изображена зависимость безразмерного градиента скорости $\frac{u_1 D}{W_\infty}$ в критической точке от числа M_∞ при сверхзвуковом обтекании сферы. Эта зависимость получена [102] по приближенной методике, основанной на допущении, что форма ударных волн перед цилиндром и сферой представляет собой соответственно концентрические цилиндрическую и сферическую поверхности, а скорость невозмущенного

потока выбрана сразу за ударной волной; экспериментальные значения получены для полусферической носовой части. В области $M \gg 5$ безразмерные градиенты в критической точке для сферы и цилиндра практически одинаковы.

При некоторых условиях пограничный слой в окрестности критической точки может стать турбулентным, например, под воздействием турбулентных пульсаций в натекающем потоке или шероховатости обтекаемой поверхности. При сверхзвуковом обтекании процессы теплоотдачи в окрестности критической точки, когда там существует турбулентный или переходный пограничный слой, еще мало изучены и поэтому здесь рассматриваться не будут.

Влияние диссоциации. Влияние диссоциации на теплоотдачу продольно обтекаемой пластины было подробно рассмотрено в предыдущем параграфе (§ 7). Здесь будут приведены конечные результаты численного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных XI-130, XI-131, XI-132, XI-133, XI-134, XI-136 (или XI-137) и XI-143 при $\frac{\partial p}{\partial s} \neq 0$.

Указанная система уравнений вначале сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а уже последние приводятся к форме, удобной для численного интегрирования на электронно-вычислительных машинах.

Таким образом эту систему решили Фей и Риддел [83] при следующих значениях определяющих величин:

1. $Pr = 0,71$;
2. $Le = 1,0$; $1,4$; $2,0$;
3. $0 \leq C_1 \leq \infty$

Величину, равную

$$C_1 = K_1 \rho_0^3 T_0^{3,5} \left(\frac{dW_1}{ds} \right)_0^{-1}, \quad (XI-169)$$

называют параметром скорости рекомбинации. Здесь K_1 — константа скорости рекомбинации, например, для рекомбинации кислорода при $T = 300^\circ K$, $K_1 \cdot T_1^{-1,5} = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^3/\text{моль}^2$.

Величина $\frac{\partial W_1}{\partial s}$ — градиент скорости в окрестности передней критической точки, зависит от градиента давления в этой области, а последний от формы головной части обтекаемого тела, в то же время она приблизительно равна времени (в секундах) диффузии частицы через пограничный слой в той же области; индексы «0» относятся к передней критической точке.

4. Параметры воздуха в окрестности передней критической точки соответствуют его термодинамически равновесному составу при скоростях от 1770 до 3000 м/сек на высотах от 7600 до 37 000 м.

5. Температура стенки изменялась в пределах от 300 до 3000° K. Для выяснения влияния отдельных параметров на теплоотдачу поступали следующим образом: менялся выбранный параметр, а все остальные оставались неизменными. и всякий раз для каждого нового значения выбранного параметра решалась исходная система уравнений. Решения были получены для двух следующих случаев:

а) «замороженный» пограничный слой — предельный случай, при котором параметр скорости рекомбинации (XI-169) равен нулю $C_1 = 0$, когда $h_w \ll I_1$.

В этом случае атомы, диффундирующие от внешнего потока через пограничный слой, будут достигать стенки, и если материал стенки не является катализатором для реакции рекомбинации, как например, некоторые стеклопластики, то концентрация атомов здесь будет стремиться к концентрации во внешнем потоке. Если материал стенки является катализатором, как например, металлы, то концентрация атомов будет уменьшаться до равновесного значения, определяемого температурой стенки. Для этих условий получена формула

$$Nu = 0,763 Pr^{0,4} \cdot Re_w^{0,5} \left[1 + (Le^{0,63} - 1) \frac{h_c}{I_1} \right]. \quad (XI-170)$$

Формула (XI-170) служит для определения коэффициента теплоотдачи $\alpha = \frac{q_w c_p}{T_r - h_w}$ в окрестности передней критической точки с учетом диссоциации, при этом предполагается, что смесь состоит только из тяжелых частиц молекул и легких атомов (§ 7);

б) *равновесный пограничный слой* — предельный случай, при котором параметр скорости рекомбинации (XI-169) стремится к бесконечности $C_1 \rightarrow \infty$, когда $h_w \ll I_1$. Исследования Фей и Риддела показали, что теплообмен в этом случае зависит от изменения произведения pr поперек пограничного слоя. Формула для определения коэффициента теплоотдачи в этом случае для каталитической стенки имеет вид

$$Nu = 0,763 Pr^{0,4} Re_w^{0,5} \left(\frac{\rho_1 \mu_1}{\rho_w \mu_w} \right)^{0,4} \left[1 + (Le^{0,5} - 1) \frac{h_c}{I_1} \right]. \quad (XI-171)$$

В формулах (XI-170) и (XI-171)

$$Nu = \frac{-q_w S c_{p,w}}{\lambda_w (T_r - h_w)} \text{ — число Нуссельта,}$$

$$Re_w \equiv \frac{\rho_w W_1 S}{\mu_w} \text{ — критерий Рейнольдса,}$$

$$h_c = h_a^0 (\alpha_1 - \alpha_w),$$

индекс «w» относится к параметрам на стенке.

Обе формулы получены в предположении, что пограничный слой в окрестности передней критической точки будет ламинарным, а числа Прандтля и Льюиса остаются неизменными по его толщине; эти формулы являются более общими по отношению к формуле (VIII-25).

§ 9. ТЕПЛОТДАЧА В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

При большом разрежении или малой плотности газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду — континуум, а следовательно, нельзя применять зависимости, полученные во всех предыдущих разделах для определения трения и теплоотдачи.

В разреженных газах средняя статистическая длина $\bar{l}_*$ свободного пробега отдельной молекулы между двумя столкновениями с другими молекулами становится сравнимой с размерами сосуда, в котором находится газ. Следовательно, величина $\bar{l}_*$ начинает оказывать влияние на физические процессы, происходящие в газе.

На основании кинетической теории и эксперимента получены следующие зависимости:

для определения коэффициента вязкости разреженного газа

$$\mu = 0,499 \bar{\nu} \bar{l}_*, \quad (\text{XI-172})$$

где $\bar{\nu}$ — средняя скорость молекул (I-21), отметим, что произведение $\bar{\nu} \bar{l}_*$ для умеренных давлений остается постоянным, т. е. не зависит от давления;

для определения коэффициента теплопроводности газа из одноатомных молекул (I-25)

$$\lambda = \frac{5}{2} \mu c'_v, \quad (\text{XI-173})$$

где c'_v — мольная теплоемкость при постоянном объеме;

для газа из сложных молекул (I-24, I-25)

$$\lambda = \frac{1}{4} (9\kappa - 5) \mu c'_v. \quad (\text{XI-174})$$

Разделим обе части (XI-174) на произведение $\rho c'_v$ и после преобразования получим формулу для определения критерия Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{4\kappa}{9\kappa - 5}. \quad (\text{XI-175})$$

Итак, важные физические константы газа — коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ — зависят от длины свободного пробега молекул $\bar{l}_*$. Следовательно, эта величина будет оказывать влияние и на теплоотдачу. На этот процесс оказывает влияние и характерный размер тела l . Совместное влияние этих величин ($\bar{l}_*$, l) на теплоотдачу в разреженном газе наилучшим образом оценивается их отношением

$$\text{Kn} = \frac{\bar{l}_*}{l}, \quad (\text{XI-176})$$

которое называют критерием Кнудсена.

Критерий Рейнольдса с учетом (XI-172) определяют по формуле

$$\text{Re} = \frac{\rho W l}{\mu} = \frac{1}{0,499} \frac{W}{\bar{\nu}} \frac{l}{\bar{l}_*}, \quad (\text{XI-177})$$

где W — скорость макроскопического потока газа.

Критерий Маха с учетом (I-21) и формулы для скорости звука (XI-2) может быть представлен в виде

$$\text{M} = \frac{W}{a} = \frac{W}{\bar{\nu}} \sqrt{\frac{8}{\pi \kappa}}. \quad (\text{XI-178})$$

Теперь можно выразить критерий Кнудсена через критерий Маха и Рейнольдса. Сопоставляя (XI-176), (XI-177) и (XI-178), получим

$$\text{Kn} = \frac{\bar{l}_*}{l} = \sqrt{\frac{\kappa \pi}{2}} \frac{\text{M}}{\text{Re}}. \quad (\text{XI-179})$$

Критерий Кнудсена можно представить также в виде следующего отношения:

$$\text{Kn}_\delta = \frac{\bar{l}_*}{\delta}, \quad (\text{XI-180})$$

где δ — толщина пограничного слоя.

Зависимость между Kn (XI-176) и (XI-180) с учетом (XI-179) будет иметь вид

$$\text{Kn} = \frac{\bar{l}_*}{l} = \frac{\bar{l}_*}{\delta} \frac{\delta}{l} = \text{Kn}_\delta \frac{\delta}{l} \cong \frac{\text{M}}{\text{Re}}, \quad (\text{XI-181})$$

откуда

$$\text{Kn}_\delta \cong \frac{l}{\delta} \frac{\text{M}}{\text{Re}}. \quad (\text{XI-182})$$

Ранее была получена зависимость (VII-7)

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}},$$

из которой для случая очень малых чисел Рейнольдса следует, что толщина пограничного слоя δ становится соизмеримой с характерным размером тела l , т. е. $\frac{\delta}{l} \approx 1$, поэтому (XI-182) принимает вид

$$\text{Kn}_\delta \cong \frac{\text{M}}{\text{Re}}.$$

Для случая очень больших чисел Рейнольдса уравнение (XI-182) с учетом (VII-8) примет вид

$$\text{Kn}_\delta \cong \sqrt{\text{Re}} \frac{\text{M}}{\text{Re}} \cong \frac{\text{M}}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (\text{XI-183})$$

При обтекании разреженным газом твердого тела наблюдаются очень интересные эффекты. Так, скорость потока не обращается в нуль у неподвижной стенки и газ не «прилипает» к поверхности, как это происходит в непрерывном потоке, а «скользит» вдоль нее. Температура газа у стенки не становится равной температуре самой стенки, как это обычно бывает в непрерывном потоке, т. е. у поверхности наблюдается скачок температуры между стенкой и слоем газа, непосредственно прилегающим к ней.

Случай обтекания, при котором наблюдаются описанные эффекты, называют режимом скользящего потока.

Случай обтекания в условиях очень больших разрежений, когда длина свободного пробега $\bar{l}_*$ становится значительно больше характерного размера тела l и когда соударения молекул с телом происходят

значительно чаще, чем соударения молекул между собой, называют режимом свободно-молекулярного потока.

Границы перечисленных режимов потока определяются величиной отношения (XI-183) $\frac{M}{\sqrt{Re}}$.

Режим непрерывного потока, поведение которого определяется законами газовой динамики, существует при $\frac{M}{\sqrt{Re}} < 0,01$.

Режим скользящего потока существует в диапазоне $0,1 > \frac{M}{\sqrt{Re}} > 0,01$.

Переходная область между режимами скользящего потока и свободно-молекулярным существует в диапазоне $10 > \frac{M}{\sqrt{Re}} > 0,1$.

Режим свободно-молекулярного потока существует при $\frac{M}{\sqrt{Re}} > 10$.

Практически режим скользящего потока может возникнуть, например, при движении сферы диаметром $d \approx 0,3$ м на высоте 30—50 км над Землей, а свободно-молекулярного потока — на высоте более 130 км. Значит искусственные спутники в период их обращения вокруг Земли, как правило, омываются свободно-молекулярным потоком, а в период их выхода на орбиту они последовательно омываются потоком с непрерывным, скользящим, переходным и свободно-молекулярным режимом течения.

Тепловой поток от газа к стенке (или обратно) зависит от коэффициента аккомодации, который представляет собой следующее отношение:

а) для одноатомных идеальных газов

$$a_* = \frac{t_r - t_i}{t_w - t_i}, \quad (XI-184)$$

где t_i — температура разреженного газа, молекулы которого ударяют в поверхность тела;

t_w — температура поверхности тела;

t_r — температура газа, молекулы которого отражаются от поверхности тела после столкновения с ним; предполагается, что отраженные молекулы не встречаются с другими, составляющими газ, в котором движется тело. Величина t_r имеет промежуточное значение между t_i и t_w ;

б) для многоатомных реальных газов формула (XI-184) оказывается непригодной, так как сложные молекулы могут обладать не только кинетической энергией, которая прямо пропорциональна абсолютной температуре, но и внутренней (например, колебательные движения атомов внутри молекул), поэтому

$$a_* = \frac{E_r - E_i}{E_w - E_i}, \quad (XI-185)$$

где E_i — полная энергия (кинетическая и внутренняя) молекул, ударяющих в поверхность тела;

E_w — полная энергия отраженных молекул, в том случае, если бы температура газа, который они составляют, была бы равна температуре стенки;

E_r — полная энергия отраженных молекул в реальных условиях.

Коэффициент тепловой аккомодации a_* зависит от материала и качества поверхности твердого тела, его значения приведены в табл. XI-1.

Таблица XI-1

Газ	Поверхность	a_*
H ₂	Светлая платина	0,32
H ₂	Темная »	0,74
O ₂	Светлая »	0,81
O ₂	Темная »	0,93
N ₂	Платина	0,50
N ₂	Вольфрам	0,35
Воздух	Слой лака на бронзе	0,88—0,89
»	Полированная бронза	0,91—0,94
»	Обработанная »	0,89—0,93
»	Травленая бронза	0,93—0,95
»	Полированный чугун	0,87—0,93
»	Обработанный »	0,87—0,88
»	Травленный »	0,89—0,96
»	Полированный алюминий	0,87—0,95
»	Обработанный »	0,95—0,97
»	Травленный »	0,89—0,97
He	Вольфрам	0,025—0,057

Теперь коротко рассмотрим процесс теплоотдачи при скользящем и свободно-молекулярном режимах потока. Отметим, что этот процесс пока еще мало изучен как теоретически, так и экспериментально.

Теплоотдача при режиме скользящего потока

Рассмотрим простой случай теплоотдачи пластины при режиме скользящего потока. Эта задача была решена Эккертом [92].

Он использовал решение, данное Релеем, для импульсивно запущенной пластины в сплошном потоке, но учел эффекты скольжения в граничных условиях. Уравнения Навье — Стокса (II-29 и II-30) для такой задачи, учитывая, что пластина движется с постоянной скоростью w_x , удастся упростить. Поток будет двумерным, безградиентным $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, пренебрегая членами $w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}$ и $v \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \right)$, получим из уравнения Навье — Стокса (II-29) для плоской задачи

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (XI-186)$$

Так как пластина движется только в направлении x , то уравнение (II-30) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Первую производную в (XI-186) можно представить в виде

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} = \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau},$$

но

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = W_x,$$

поэтому

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} = W_x \frac{\partial w_x}{\partial x}.$$

Теперь уравнение (XI-186) можно представить в виде

$$W_x \frac{\partial w_x}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (\text{XI-187})$$

Граничные условия к (XI-187) для режима скользящего потока вдоль пластины имеют вид:

1) в начальный момент времени, когда пластина еще не начала двигаться

$$w_x = W_x; \quad x = 0; \quad y > 0;$$

2) через некоторый промежуток времени после начала движения пластины скорость газа w_x у поверхности пластины не равна скорости самой пластины W_x . Скорость газа у стенки, если считать, что все молекулы отражаются зеркально, пропорциональна градиенту скорости на стенке, т. е.

$$w_x = \bar{l}_* \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right), \quad y = 0, \quad x > 0.$$

Решение (XI-187) для граничных условий (1) и (2) имеет вид [92]

$$C_D M = \frac{2,67}{X_1^2} \left(e^{X_1^2} \operatorname{erfc} X_1 - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} X_1 \right), \quad (\text{XI-188})$$

где C_D — коэффициент лобового сопротивления; определен как отношение силы сопротивления двух сторон пластины длиной l и шириной, равной единице, к величине $\frac{\rho W_x^2 l}{2}$;

$$X_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{M^2}};$$

$$\operatorname{erfc} X_1 = 1 - \operatorname{erf} X_1.$$

На рис. XI-30 приводится сопоставление зависимости (XI-188) с экспериментальными данными. По смыслу C_D представляет собой средний коэффициент трения (VII-26), но динамическое давление определено по скорости пластины W_x .

Коэффициент теплоотдачи для рассмотренного случая был найден аналитически Дрейком [92]. На основании тех же упрощений, при ко-

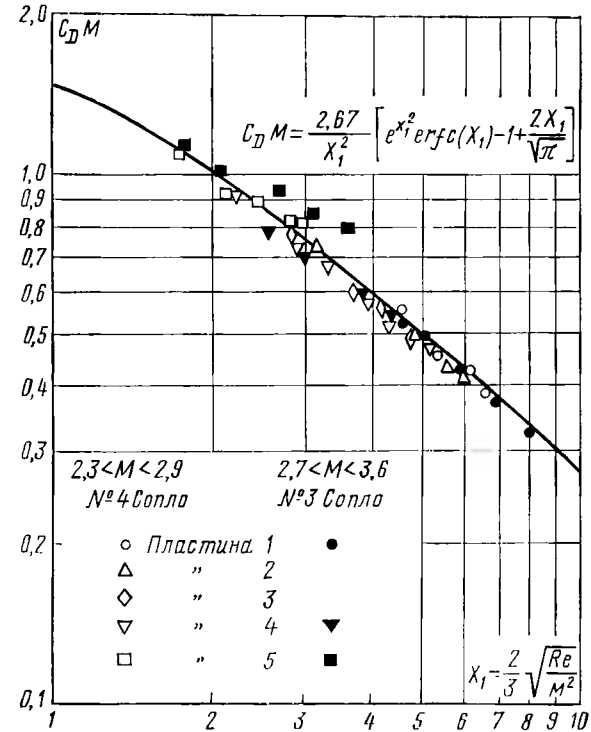


Рис. XI-30. Коэффициент сопротивления трению пластины в скользящем потоке; сравнение результатов расчета по формуле (XI-188) с экспериментальными данными [92]

торых было получено уравнение (XI-188). Уравнение энергии можно привести к виду

$$W_x \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \quad (\text{XI-189})$$

Граничные условия с учетом скачка температуры можно представить в форме

$$t_{y=0} - t_w = \frac{2-a_*}{a_*} \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{\bar{l}_*}{\operatorname{Pr}} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad y = 0, \quad x > 0;$$

$$t = t_f, \quad x = 0, \quad y > 0.$$

Решение уравнения (XI-189) для $a_* = 0,8$ и $\kappa = 1,4$ имеет вид

$$\text{St } M = \frac{0,38}{X_2^2} \left(e^{X_2^2} \text{erfc } X_2 - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} X_2 \right), \quad (\text{XI-190})$$

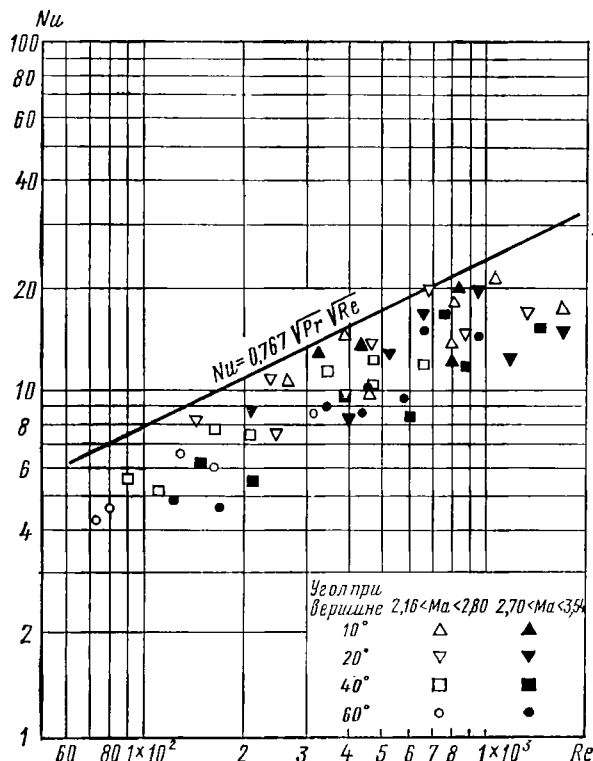


Рис. XI-31. Сравнение коэффициентов теплоотдачи в окрестности передней критической точки при обтекании конуса сплошным (— расчет по формуле $Nu = 0,767 \sqrt{Pr} \sqrt{Re}$) и скользящим (□, △, ○, ... — эксперимент) потоками газа

$$X_2 = \sqrt{\frac{Re Pr}{6,9 M^2}},$$

$$\text{St} = \frac{\alpha}{W_x \rho c_p}.$$

Уравнение (XI-190) еще нуждается в экспериментальной проверке.

На рис. XI-31 представлена аналитическая зависимость числа Нуссельта от Рейнольдса* для конусов в непрерывном потоке в виде линии;

* Числа Рейнольдса вычислены за предполагаемой ударной волной для $M > 1$, теплопроводность вычислена при равновесной температуре.

на том же рисунке приведены экспериментальные значения, полученные в скользящем потоке. Из рисунка видно, что теплоотдача в скользящем потоке менее интенсивна, так как здесь проявляется дополнительное сопротивление тепловому потоку в виде скачка температуры у стенки.

Теплоотдача при режиме свободно-молекулярного потока

Такой режим потока наблюдается при очень больших разрежениях, когда длина свободного пробега молекул на один или более порядков превышает характерный размер тела. Теплоотдачу в этих условиях можно определить следующим образом: подсчитать энергию (поступательного, вращательного и колебательного движения) молекул, падающих на тело; подсчитать энергию молекул, отраженных от тела; разность этих двух энергий и будет искомой величиной

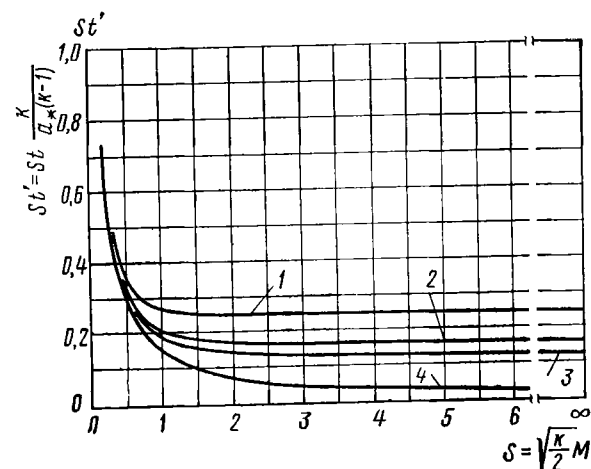


Рис. XI-32. Зависимость $\text{St} \frac{k}{a_*(k-1)} = f\left(\sqrt{\frac{k}{2}} M\right)$ (формула XI-194) для определения коэффициента теплоотдачи при взаимодействии тел со свободно-молекулярным потоком:

1 — пластина, расположенная нормально к потоку, 2 — поперечно-обтекаемый цилиндр, 3 — сфера, 4 — пластина, расположенная параллельно потоку [107]

Отметим здесь, что даже при очень больших разрежениях газ сохраняет свои макроскопические свойства. Например, на высоте 150 км плотность примерно равна $1,6 \cdot 10^{-8} \text{ кг/м}^3$, т. е. очень мала, однако число молекул в одном кубическом сантиметре равно $6,1 \cdot 10^{11}$, т. е. все еще очень велико и вполне достаточно для вычисления таких макроскопических величин, как давление, температура, число Маха. В то же время в свободно-молекулярном потоке не образуется пограничного слоя. Учитывая, что столкновения молекул друг с другом у поверхности тела происходят очень редко, можно считать, что в этом простран-

стве остается в силе закон распределения скоростей молекул, сформулированный Максвеллом [16].

Это обстоятельство позволяет вычислить теплоотдачу на основании законов кинетической теории газов.

Формулы для определения коэффициента теплоотдачи удобно выражать через модифицированное число Стантона St'

$$St' = \frac{\alpha}{\rho W_{\infty} c_p a_*} \frac{k}{k-1} = St \frac{k}{a_* (k-1)} \quad (XI-191)$$

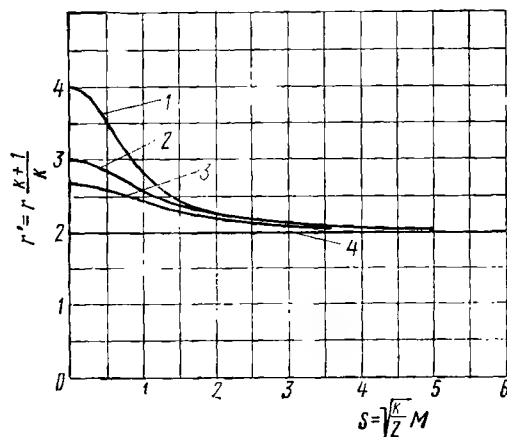


Рис. XI-33. Зависимость $r \frac{k+1}{k} = f\left(\sqrt{\frac{k}{2}} M\right)$ (формула XI-195) для определения коэффициента восстановления при взаимодействии тел со свободно-молекулярным потоком:

1 — пластина, расположенная нормально к потоку, 2 — поперечно-обтекаемый цилиндр; 3 — сфера, 4 — пластина, расположенная параллельно потоку

Формулы для определения среднего коэффициента теплоотдачи St' и коэффициента восстановления r' при взаимодействии свободно-молекулярного потока с пластиной, расположенной к направлению его скорости под произвольным углом ψ , имеют вид [107]:

$$St' = \frac{1}{4\sqrt{\pi} S} [e^{-(S \sin \psi)} + \sqrt{\pi} (S \sin \psi) \operatorname{erf}(S \sin \psi)], \quad (XI-194)$$

$$r' = \frac{1}{S^2} \left[2S^2 + 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\pi} (S \sin \psi) \operatorname{erf}(S \sin \psi) e^{(S \sin \psi)^2}} \right]. \quad (XI-195)$$

На рис. XI-32 приведена зависимость $St' = f(S)$, а на рис. XI-33 — $r' = f_1(S)$ для пластины, цилиндра и сферы.

§ 10. АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРЕВАНИЕ

Наружная обшивка летательных аппаратов при больших скоростях полета значительно нагревается вследствие влияния аэродинамических факторов — сжатия воздуха в окрестности передней критической точки, трения и диссоциации и действия лучистого потока теплоты от Солнца и Земли.

При полете в плотных слоях атмосферы вплоть до высот в 150 км решающее значение имеет аэродинамический нагрев, и лучистым потоком теплоты обычно пренебрегают. При полете на высотах более 150 км плотность воздуха становится столь малой, что аэродинамическим нагревом можно пренебречь, в этих условиях решающее значение приобретает лучистый нагрев. В настоящем параграфе будет коротко рассмотрено только аэродинамическое нагревание.

При проектировании летательных аппаратов нужно знать, каких значений достигает температура наружной обшивки аппарата T_w при заданной траектории полета. Температура может достигнуть таких значений, при которых летательный аппарат разрушится, если не принять специальных мер тепловой защиты. Определение температуры T_w для реальных условий полета представляет собой, как правило, очень трудную задачу. Относительно просто определить *равновесную* температуру обшивки T_{we} , которая установится при условии равенства потоков теплоты к поверхности тела, например, конвекцией и от тела, например, лучеиспусканием.

Для данной высоты полета на температуру T_{we} оказывает существенное влияние режим течения в пограничном слое и степень черноты ϵ (1-15). Например, на высоте 30 км при $M = 10$, $\epsilon = 0,9$ при ламинарном пограничном слое $T_{we}^{\text{лам}} \approx 500^\circ \text{C}$, а при турбулентном $T_{we}^{\text{турб}} \approx 800^\circ \text{C}$. В тех же условиях, но при $\epsilon = 0,1$ соответственно $T_{we}^{\text{лам}} \approx 950^\circ \text{C}$ и $T_{we}^{\text{турб}} = 1350^\circ \text{C}$. С уменьшением степени черноты ϵ материала обшивки при прочих равных условиях ее температура увеличивается. Отсюда можно сделать вывод, что для уменьшения температуры обшивки следует применять материалы с большей степенью черноты. Однако степень черноты ϵ зависит не только от физических свойств материала, но и от качества его поверхности — например, шероховатые имеют большие ϵ . В то же время шероховатые поверхности способствуют переходу ламинарного режима течения в пограничном слое к турбулентному, что приводит к увеличению теплового потока к стенке. Это очевидное противоречие сглаживается при полете с большими числами Маха, когда шероховатость слабо влияет на величину критического числа Маха, при котором происходит переход ламинарного режима течения в пограничном слое в турбулентный. Равновесная температура возникает при стационарном тепловом режиме. При резко изменяющихся условиях полета, например, при входе баллистического снаряда в плотные слои атмосферы, тепловой поток к стенке будет переменным, естественно, что и температура стенки также будет переменной как по времени, так и по ее толщине.

Отметим, что лучистый поток теплоты от стенки в окружающую среду ограничивается в связи с тем, что искусственно ограничивается

рост температуры обшивки, для того чтобы обеспечить ее прочность. Определение температуры обшивки в рассматриваемом случае становится весьма сложной задачей. Внесем упрощение. Будем считать, что температура обшивки по толщине не изменяется и равна ее некоторому среднему значению. В этих условиях уравнение теплового баланса для элемента объема обшивки $\Delta F \delta$ можно представить в виде

$$\Delta F c \delta \rho_{\text{тв}} \left(\frac{dT_w}{d\tau} \right) = \Delta F \alpha (T_{aw} - T_w) - \Delta F \epsilon \sigma_0 T_w^4 \quad (\text{XI-196})$$

или

$$\frac{dT_w}{d\tau} = \frac{\alpha}{G} (T_{aw} - T_w) - \frac{\epsilon \sigma_0 T_w^4}{G}, \quad (\text{XI-197})$$

где ΔF — элемент поверхности обшивки;

c — массовая теплоемкость;

δ — толщина обшивки;

$\rho_{\text{тв}}$ — плотность материала обшивки;

α — коэффициент теплоотдачи;

$T_{aw} = T_{r\infty}$ — температура восстановления (XI-12);

T_w — искомая температура стенки;

$G = c \delta \rho_{\text{тв}}$ — теплопоглощающая способность обшивки;

$\Delta F \epsilon \sigma_0 T_w^4$ — лучистый тепловой поток от поверхности ΔF обшивки.

Левая часть уравнения (XI-196) представляет собой изменение тепло-содержания элемента массы $\Delta F \delta \rho_{\text{тв}}$ обшивки в единицу времени, правая — результирующий тепловой поток в рассматриваемый элемент массы за то же время.

Уравнение (XI-197) можно написать через число Стантона в виде

$$\frac{dT_w}{d\tau} = \frac{1}{G} St_{\infty} c_p \rho_{\infty} W_{\infty} (T_{aw} - T_w) - \frac{\epsilon \sigma T_w^4}{G}. \quad (\text{XI-198})$$

Связь числа Стантона с местным коэффициентом трения имеет вид (XI-92)

$$St_{\infty} = \frac{1}{2} c_{f\infty}.$$

Для турбулентного пограничного слоя экспериментально установлена зависимость

$$St = 0,6 c_{f\infty}. \quad (\text{XI-199})$$

Используя зависимости (XI-9, XI-14, XI-92, XI-199), можно представить (XI-198) в другой, более удобной для решения, форме [102]:

для ламинарного пограничного слоя

$$\frac{dT_w}{d\tau} = \frac{1}{G} \left[\frac{Pr}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{T_{aw} - T_w}{T_{aw} - T_{\infty}} \right) \right] c_{f\infty} \frac{\rho_{\infty} a_{\infty}^3}{2} M_{\infty}^3 - \frac{\epsilon \sigma T_w^4}{G}; \quad (\text{XI-200})$$

для турбулентного пограничного слоя

$$\frac{dT_w}{d\tau} = \frac{1}{G} \left[0,6 Pr^{1/3} \left(\frac{T_{aw} - T_w}{T_{aw} - T_{\infty}} \right) \right] c_{f\infty} \frac{\rho_{\infty} a_{\infty}^3}{2} M_{\infty}^3 - \frac{\epsilon \sigma T_w^4}{G}. \quad (\text{XI-201})$$

В первом приближении можно считать, что ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный при числе Рейнольдса $Re = 1 \cdot 10^6$.

Нелинейные дифференциальные уравнения (XI-200) и (XI-201) решаются численными методами. С порядком решения можно ознакомиться в специальной литературе [102, 97].

§ 11. ТЕПЛООТДАЧА В ТРУБАХ И СОПЛАХ

Скорость потока жидкости при движении по трубе постоянного сечения, как известно из термодинамики, может быть только дозвуковой, достигая при благоприятных условиях скорости звука в выходном сечении трубы. При числе Маха вплоть до $M = 0,9$ движение сжимаемой жидкости в трубе мало отличается от движения несжимаемой жидкости. Для определения коэффициента теплоотдачи в трубе при движении сжимаемой жидкости можно воспользоваться соотношением (VII-117)

$$St = \frac{\xi}{8}.$$

В число Стантона входят средние по сечению трубы значения плотности ρ и скорости W .

Зависимость коэффициента сопротивления трению в трубе ξ от числа Маха M при адиабатном течении газа в трубе для чисел M от 0,65 до 0,95 получена экспериментально в работе [23, 61]. В диапазоне чисел M от 0,65 до 0,90 величина ξ изменяется примерно от 0,012 до 0,010, а в диапазоне M от 0,90 до 0,95 — от 0,010 до 0,007. Опыты были проведены при расходах газа 0,165 ÷ 0,280 кг/сек.

Формула для определения коэффициента теплоотдачи при течении в трубах до $M = 0,8$ предложена в работе [23, 61] в виде

$$St = 0,0167 (Re \cdot Pr)^{-0,18} \left(\frac{T_m}{T_w} \right)^{0,85}, \quad (\text{XI-202})$$

где T_m — средняя по сечению трубы температура торможения;
 T_w — абсолютная температура стенки.

Все физические константы в (XI-202), кроме плотности, отнесены к температуре стенки. Плотности (как и скорости) усредняются по сечению.

На некоторой длине трубы постоянного сечения газ можно заставить двигаться со сверхзвуковой скоростью, если его предварительно разогнать в сопле Лавала, а затем направить в трубу. В результате

горьжения на некотором расстоянии от входа в трубу поток вновь станет дозвуковым. Для определения локальных коэффициентов теплоотдачи на участке трубы, где газ движется со сверхзвуковой скоростью, были проведены специальные исследования А. С. Сукомелом и др. [32] и получена следующая формула:

$$Nu = 0,022 Re^{0,8} \cdot Pr^{0,43} \left(\frac{T_r}{T_w} \right)^{0,42} \cdot \epsilon_l, \quad (X1-203)$$

где T_r — средняя термодинамическая температура газа. Все физические константы в (X1-203) отнесены к температуре в данном сечении трубы. В критерий Рейнольдса входит средняя в данном сечении скорость газа. В качестве характерного размера принят внутренний диаметр трубы. Поправка ϵ_l учитывает изменение теплоотдачи по длине трубы. Если турбулентный пограничный слой начинается от входного сечения трубы $x = 0$, то

$$\text{для } \frac{x}{d} < 15 \text{ получено } \epsilon_l = 1,38 \left(\frac{x}{d} \right)^{0,12};$$

$$\text{для } \frac{x}{d} \geq 15 \text{ получено } \epsilon_l = 1.$$

Значительный интерес представляют процессы теплообмена в камерах горения и соплах ракетных двигателей. Тепловые потоки от

продуктов горения к стенкам достигают значений порядка $1,2 \cdot 10^6 \div 2,4 \cdot 10^7 \text{ вт/м}^2$. Теплота переносится к стенкам конвекцией и радиацией. Доля радиационного переноса достигает 20—30%, так как температура газов очень высока и часто превосходит 3000°K . В связи с резким изменением параметров газа по длине двигателя (например, давление меняется от многих десятков бар в камере горения примерно до одного бара на срезе сопла, при этом температура падает на несколько сот градусов) меняется химический состав продуктов горения, их физические константы, степень диссоциации. В этих условиях теоретическое определение теплоотдачи в ракетном двигателе затруднено, и поэтому в настоящее время решающее значение имеют экспериментальные исследования. При огромном многообразии размеров и форм двигателей, а также сортов топлива и окислителя невозможно, даже экспериментально, составить одну обобщенную формулу для определения коэффициента теплоотдачи.

Рассмотрим некоторые общие закономерности для теплоотдачи в ракетных двигателях. На рис. XI-34 представлен график распределения теплоотдачи по длине ракетного двигателя [45, 80].

Наиболее интенсивная теплоотдача наблюдается в самом узком сечении сопла или в его горловине, так как здесь массовая скорость газа будет наибольшей. Исследования показали, что коэффициент теплоотдачи, определяемый по формуле

$$\alpha = \frac{q_w}{T_{aw} - T_w},$$

будет пропорционален массовой скорости газа ρW в степени примерно 0,8, что свидетельствует о том, что в соплах ракетных двигателей происходит турбулентный перенос теплоты [1, 45].

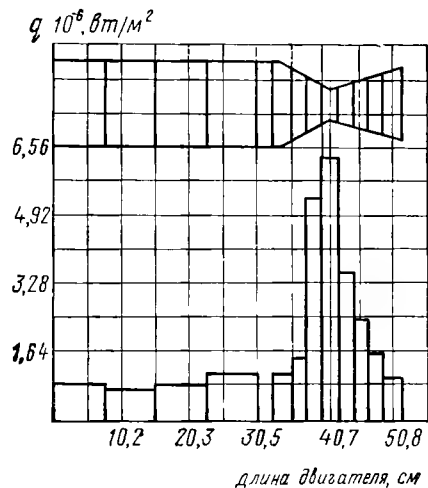


Рис. XI-34. Распределение тепловых потоков к стенке по длине ракетного двигателя [80]

ТЕПЛОТДАЧА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ И КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ

Конденсацией называют процесс перехода вещества из газообразного состояния в жидкое или твердое. Конденсация в твердое состояние называется д е с у б л и м а ц и е й. Различают конденсацию в объеме пара или парогазовой смеси и конденсацию на поверхности твердого тела или жидкости, с которыми пар (парогазовая смесь) находится в контакте.

В первом параграфе настоящей главы будет рассмотрена теплоотдача в процессе конденсации пара на твердой поверхности.

К и п е н и е м называют процесс парообразования*, характеризующийся возникновением новых свободных поверхностей раздела жидкой и паровой фаз внутри жидкости, нагретой выше температуры насыщения.

Во втором и третьем параграфах настоящей главы будет рассмотрена теплоотдача от твердой поверхности к кипящей жидкости.

Работа многих теплообменных устройств сопровождается конденсацией или кипением, и поэтому теплоотдача в этих условиях должна быть изучена.

§ 1. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА

Пар начинает конденсироваться на поверхности, если ее температура поддерживается ниже температуры насыщения при данном давлении. Различают пленочную и капельную конденсацию.

П л е н о ч н а я к о н д е н с а ц и я — это процесс перехода вещества из газообразного состояния в жидкое на гидрофильной (хорошо смачиваемой жидкостью) поверхности твердого тела, при котором образуется сплошная пленка конденсата.

К а п е л ь н а я к о н д е н с а ц и я — это процесс перехода вещества из газообразного состояния в жидкое на гидрофобной (несмачиваемой жидкостью) поверхности твердого тела, при котором на ней образуются отдельные капли конденсата.

При пленочной конденсации (если температура на поверхности жидкой пленки ниже температуры насыщения при данном давлении, то процесс конденсации продолжается) толщина пленки растет и под действием сил тяжести пленка начинает стекать вниз по вертикальной

стенке. Возможны ламинарный и турбулентный режимы течения. Например, на вертикальной стенке, начиная от ее верхнего конца, пленка имеет ламинарное течение, но по мере опускания ее толщина увеличивается, и течение переходит в турбулентное. При ламинарном течении слои жидкости движутся параллельно стенке и перенос теплоты осуществляется молекулярной теплопроводностью; при турбулентном основная доля теплоты переносится частицами жидкости (элементарными объемами).

Коэффициент теплоотдачи при пленочной конденсации водяного пара атмосферного давления достигает величин порядка $\alpha = 7 \cdot 10^3 \div 12 \cdot 10^3 \text{ вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$. При капельной конденсации на поверхности нагрева образуются капельки жидкости, со временем они растут и, достигая определенного размера, скатываются по вертикальной стенке, увлекая за собой другие капли, при этом создаются благоприятные условия для теплоотдачи. Капли увеличивают поверхность теплообмена и, кроме того, процесс скатывания капель интенсифицирует перенос теплоты. В результате коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации водяного пара атмосферного давления может достигать величин порядка $40 \cdot 10^3 \div 100 \cdot 10^3 \text{ вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$.

Можно получить компактный конденсатор, если осуществлять в нем капельную конденсацию. Были предприняты попытки создать условия, при которых должна происходить капельная конденсация, например, путем добавки гидрофобизаторов* в пар или нанесение их на поверхность стенки. Однако такой способ интенсификации теплоотдачи при конденсации пока не получил широкого распространения. В современных конденсаторах практически всегда осуществляется пленочная конденсация.

Рассмотрим теплоотдачу при конденсации пара.

Ламинарное течение пленки

При ламинарном течении пленки коэффициент теплоотдачи оказывается наименьшим из тех, которые возможны в процессе конденсации. Любое отклонение от ламинарного режима течения приводит к интенсификации теплоотдачи.

Способы определения коэффициента теплоотдачи при ламинарном течении пленки разработаны давно. В 1916 г. Нуссельт аналитически вывел формулу для определения коэффициента теплоотдачи.

Рассмотрим процесс теплоотдачи при конденсации сухого насыщенного пара по вертикальной стенке (рис. XII-1) при следующих, упрощающих реальную физическую обстановку, предположениях:

течение пленки ламинарное;

силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости и тяжести;

* П а р о о б р а з о в а н и е — переход вещества из жидкого или твердого состояния в газообразное (парообразное). Парообразование из твердого состояния называется с у б л и м а ц и е й [74].

* Г и д р о ф о б и з а т о р — вещество, наносимое на поверхность тела с целью поддержания капельной конденсации (путем создания гидрофобного поверхностного слоя), например, некоторые жиры и парафины.

конвективный перенос теплоты в пленке конденсата и теплопроводность вдоль пленки пренебрежимо малы по сравнению с теплопроводностью поперек пленки;

влиянием трения между поверхностью пленки конденсата и пара пренебрегаем;

температура на внешней границе пленки конденсата равна температуре пара;

плотность конденсата и его физические константы (λ , μ) не зависят от температуры;

градиент давления зависит от изменения гидростатического давления пара вдоль оси x , так как оно мало, то $\frac{dp}{dx} = 0$.

С учетом перечисленных допущений система уравнений, описывающая процесс теплоотдачи, имеет вид:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0, \quad (XII-1)$$

уравнение движения

$$\mu_{ж} \frac{d^2 w_x}{dy^2} = \rho_{ж} g, \quad (XII-2)$$

граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0, \quad T = T_w, \quad w_x = 0; \\ \text{при } y = \delta_x, \quad T = T'' \text{ и } \left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{гp} = 0. \end{array} \right\} \quad (XII-3)$$

Здесь δ_x — толщина пленки конденсата;
 T'' — температура насыщения*;

индекс «гр» указывает на границу между конденсатом и паром; производная $\frac{dw_x}{dy}$ может быть не равна нулю, если поток пара над жидкой пленкой будет либо тормозить ее верхний слой, либо ускорять, но в рассматриваемом случае принято, что скорость пара мала и трение на границе раздела не учитывается.

Решение уравнения энергии при заданных граничных условиях можно представить в следующем виде (гл. IV):

$$\frac{dT}{dy} = \frac{T'' - T_w}{\delta} \quad (XII-4)$$

* Температурой насыщения T'' называется такая температура, при которой жидкость и пар находятся в термодинамическом равновесии при плоской поверхности раздела; она (T'') зависит от давления, под которым находится жидкость.

Абсолютная величина теплового потока через пленку конденсата представляется в двух следующих формах:

$$|q| = \lambda_{ж} \frac{dT}{dy} \text{ и } q = \alpha (T'' - T_w). \quad (XII-5)$$

Совмещая уравнения (XII-4) и (XII-5), получим

$$\alpha_x = \frac{\lambda_{ж} \frac{dT}{dy}}{T'' - T_w} = \frac{\lambda_{ж}}{\delta_x}. \quad (XII-6)$$

Из (XII-6) можно найти локальный коэффициент теплоотдачи α_x при конденсации жидкости на твердой поверхности на расстоянии x от верхнего конца стенки (начало координат, см. рис. XII-1), если известно локальное значение толщины пленки конденсата δ_x на том же расстоянии x от начала координат.

Определим толщину пленки конденсата δ_x . Интегрируя уравнение движения (XII-2) при граничных условиях (XII-3), получим

$$w_x = \frac{g \rho_{ж}}{\mu_{ж}} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) \quad (XII-7)$$

— параболическое распределение скорости w_x по толщине пленки конденсата.

Количество конденсата, образовавшегося на единице площади поверхности пленки в единицу времени на расстоянии x от начала координат, можно определить из уравнения

$$G_x = \frac{q_x}{r} = \frac{\lambda}{\delta_x} \frac{1}{r} (T'' - T_w), \quad (XII-8)$$

где

$$q_x = \frac{\lambda_x}{\delta_x} (T'' - T_w);$$

r — теплота парообразования (конденсации).

Количество конденсата G_x , протекающего через поперечное сечение на расстоянии x от верхней кромки пластины, пленки шириной, равной единице, толщиной δ_x , в единицу времени, можно представить в форме

$$G_x = \rho_{ж} \cdot \bar{w}_x \cdot \delta_x \cdot 1. \quad (XII-9)$$

Величину средней скорости $\bar{w}_x$ определяют по формуле

$$\bar{w}_x = \frac{1}{\delta_x} \int_0^{\delta_x} w_x dy = \frac{\rho_{ж} g}{3 \mu_{ж}} \delta_x^2. \quad (XII-10)$$

Тогда выражение (XII-9) с учетом (XII-10) можно представить в виде

$$G_x = \frac{\rho_{ж}^2 g}{3\mu_{ж}} \delta_x^3. \quad (XII-11)$$

Приращение количества конденсата dG_x , протекающего через поперечное сечение на расстоянии $x + dx$ пленки, определим из (XII-11)

$$dG_x = \frac{\rho_{ж}^2 g \delta_x^2}{\mu_{ж}} d\delta_x. \quad (XII-12)$$

Это приращение (XII-12) возникает вследствие конденсации на поверхности жидкой пленки (на площадке $dx \cdot 1$), и поэтому его можно определить из (XII-8)

$$dG_x = \frac{\lambda_{ж}}{\delta_x} \frac{1}{r} (T'' - T_w). \quad (XII-13)$$

Приравняв правые части (XII-12 и XII-13), после преобразования получим

$$\frac{r\rho_{ж}^2 g}{\lambda_{ж} \mu_{ж}} \delta_x^3 d\delta = (T'' - T_w) dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем

$$\frac{r\rho_{ж}^2 g}{4\lambda_{ж} \mu_{ж}} \delta_x^4 = (T'' - T_w) x + C. \quad (XII-14)$$

Постоянную C в (XII-14) найдем из условия $\delta = 0$ при $x = 0$, тогда $C = 0$.

Определим толщину пленки конденсата из (XII-14) для произвольного сечения с учетом $C = 0$

$$\delta_x = \sqrt[4]{\frac{4\lambda_{ж} \mu_{ж} (T'' - T_{ст}) x}{r\rho_{ж}^2 g}}. \quad (XII-15)$$

Формулу для определения локального коэффициента теплоотдачи α_x при конденсации жидкости на твердой стенке найдем, совмещая (XII-6 и XII-15)

$$\alpha_x = \sqrt[4]{\frac{r\rho_{ж}^2 g \lambda_{ж}^3}{4\mu_{ж} (T'' - T_{ст}) x}}. \quad (XII-16)$$

Для определения среднего значения $\bar{\alpha}$ на длине L стенки, по аналогии с (XII-14) получим

$$\bar{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{r\rho_{ж}^2 g \lambda_{ж}^3}{4\mu_{ж} (T'' - T_{ст}) L}}. \quad (XII-17)$$

Формулу (XII-17) можно представить в следующей критериальной форме:

$$\bar{Nu} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} Ga \cdot Pr \cdot K \right)^{\frac{1}{4}} = 0,943 (Ga \cdot Pr \cdot K)^{\frac{1}{4}}, \quad (XII-18)$$

где $\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda}$ — число Нуссельта жидкой пленки;

$Ga = \frac{gL^3}{\nu^2}$ — критерий Галилея (III-24);

$K = \frac{r}{c_{p, ж} \Delta T}$ — критерий фазового превращения.

Представим выражение (XII-18) в другой форме, введя туда число Рейнольдса жидкой пленки в виде

$$Re \equiv \frac{\bar{w} \delta}{\nu_{ж}} = \frac{G}{\mu_{ж}}, \quad (XII-19)$$

где G — количество конденсата, протекающего через сечение L (L — длина пластины); ширина сечения 1 м, а высота δ .

На основании (XII-8) представим G в форме

$$G = \frac{\bar{\alpha} \cdot \Delta T \cdot L}{r}. \quad (XII-20)$$

Совмещая выражения (XII-19 и XII-20), получим

$$Re \equiv \frac{\bar{\alpha} \cdot \Delta T \cdot L}{r \mu_{ж}} = \frac{\bar{Nu}}{Pr \cdot K}. \quad (XII-21)$$

Путем преобразований (XII-18) с использованием (XII-21) можно получить искомую форму

$$\bar{Nu} \cdot Ga^{-\frac{1}{3}} = 0,925 Re^{-\frac{1}{3}} \quad (XII-22)$$

или

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,925 Re^{-\frac{1}{3}}, \quad (XII-23)$$

где $\frac{\nu^2}{g}$ принимается в качестве характерного размера, м.

В работах [45 и 49] был определен коэффициент теплоотдачи при ламинарном течении пленки с учетом сил инерции и конвективного переноса теплоты в ней. Сравнение полученных результатов [45, 49] с результатами Нуссельта (XII-17) показало, что при

$$K \equiv \frac{r}{c_{p, ж} \Delta T} > 5 \text{ и } 1 \leq Pr \leq 100,$$

разница составляет несколько процентов и ее можно не учитывать.

Влияние на теплоотдачу изменчивости физических констант жидкости с температурой можно приблизительно учесть путем введения в формулу (XII-18) множителя $(Pr''/Pr_w)^{0,25}$, где Pr'' и Pr_w — критерии Прандтля, вычисляемые соответственно для температуры насыщенного пара T'' и стенки T_w .

Движение пленки конденсата может быть волновым при сохранении ламинарного режима течения. Волновое движение пленки начинается при определенном соотношении сил тяжести, вязкости и поверхностного натяжения.

Академик П. Л. Капица [33] установил, что при волновом движении средняя толщина пленки оказывается меньше, чем вычисленная по формуле (XII-15), тепловое сопротивление пленки снижается, а коэффициент теплоотдачи возрастает на 21% против величины, вычисленной по формуле (XII-17). Такая поправка (на 21%) получена в предположении, что волновое течение имеет упорядоченный периодический характер, а температура пленки остается постоянной. В действительности физическая обстановка при волновом течении пленки оказывается значительно сложнее. По-видимому, волновое движение становится трехмерным и имеет беспорядочный характер. Эти обстоятельства могут привести к турбулизации потока конденсата.

Перечисленные факторы, которые возникают в реальных условиях при волновом течении пленки, интенсифицируют теплоотдачу; учесть их влияние теоретически пока не удалось. Поэтому поправка, учитывающая волновое движение пленки по вертикальной стенке, была определена экспериментально и введена в выражения (XII-17, XII-18 и XII-22). В результате получены следующие формулы для определения среднего коэффициента теплоотдачи [45]:

$$\bar{\alpha} = 1,13 \sqrt[4]{\frac{g \lambda_{ж}^3 \rho_{ж}^2 r}{\mu \cdot \Delta T \cdot L}} \quad (XII-24)$$

или

$$\bar{Nu} = 1,13 (Ga \cdot Pr \cdot K)^{\frac{1}{4}}$$

и

$$\bar{Nu} \cdot Ga^{-\frac{1}{3}} = 1,18 Re^{-\frac{1}{3}}. \quad (XII-25)$$

Капица П. Л. установил, что течение пленки становится волновым, когда

$$Re = \frac{\bar{w} \delta}{\nu} \geq Re_b,$$

где $Re_b = \frac{\bar{w} \delta}{\nu}$ — число Рейнольдса, при котором на поверхности ламинарной пленки начинают образовываться волны. Значения чисел Re_b для различных веществ даны в табл. XII-1.

Вещество	T'' (температура насыщения °C) Re_b — число Рейнольдса			
	100,0 8,2	180,0 9,3	300,0 8,3	360,0 5,7
Вода				10,0 6,7
Аммиак	—	—	—	84
Пропан	34,0 6,4	51,0 6,1	60,0 6,1	5,0
Этиловый спирт	78,0 4,9	141,0 7,5	182,0 6,1	231,0 4,4

Турбулентное течение пленки

По мере стекания жидкой пленки по вертикальной стенке изменяется число Рейнольдса $Re = \frac{\bar{w} \delta}{\nu}$ (XII-19). При некотором критическом числе $Re_{кр}$ ламинарный режим течения пленки переходит в турбулентный. $Re_{кр}$ лежит в следующих пределах:

$$100 < Re_{кр} < 500. \quad (XII-26)$$

В работе [45] указано, что при конденсации водяного пара переход от ламинарного течения пленки воды к турбулентному наблюдался уже при $Re > 100$.

В условиях турбулентного режима течения пленки теплоотдача интенсифицируется по сравнению с условиями ламинарного течения пленки.

При ламинарном течении пленки тепло переносится только молекулярной теплопроводностью, а при турбулентном еще и вследствие турбулентных пульсаций. Ранее уже отмечалось (гл. VII), что теоретическое определение коэффициента теплоотдачи при турбулентном режиме течения жидкости пока невозможно; поэтому расчетные зависимости составляют на основе экспериментальных данных. Ниже приводится формула для определения среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации в условиях турбулентного режима течения жидкой пленки [19]

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,0133 Re^{0,4}. \quad (XII-27)$$

При определении среднего коэффициента теплоотдачи для всей поверхности вертикальной стенки необходимо учитывать, что в верхней ее части течение пленки ламинарное, а в нижней турбулентное.

Средний коэффициент теплоотдачи для всей поверхности можно определить из выражения

$$\bar{\alpha} = \alpha_{\text{л}} \frac{x_{\text{кр}}}{L} + \alpha_{\text{тб}} \left(1 - \frac{x_{\text{кр}}}{L}\right), \quad (\text{XII-28})$$

где $x_{\text{кр}}$ — расстояние от верхнего конца вертикальной стенки до места, где происходит переход от ламинарного течения пленки к турбулентному;

$\bar{\alpha}_{\text{л}}$ и $\bar{\alpha}_{\text{тб}}$ — средние коэффициенты теплоотдачи, соответственно в областях ламинарного и турбулентного течения пленки.

Величина $x_{\text{кр}}$ с учетом волнового движения ламинарной пленки определяется по формуле [45]

$$\frac{x_{\text{кр}}}{L} = 0,845 \text{K} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Ga}^{-\frac{1}{3}} \text{Re}_{\text{кр}}^{\frac{4}{3}}. \quad (\text{XII-29})$$

Точность определения $x_{\text{кр}}$ зависит от того, насколько удачно выбрано значение критического числа Рейнольдса (XII-26).

С влиянием скорости течения пара на теплоотдачу при конденсации на вертикальной поверхности, а также с процессами теплоотдачи при конденсации пара внутри труб и на их наружной поверхности и т. д. можно познакомиться в специальной литературе [Л. 45].

§ 2. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим процесс переноса теплоты от твердого тела (поверхности нагрева) к кипящей жидкости. Различают два основных режима кипения — пузырьковое и пленочное.

Пузырьковым кипением называют такое, при котором пар образуется в виде периодически зарождающихся и растущих пузырей. Паровые пузырьки могут возникнуть на поверхности нагрева и в объеме жидкости. Если температура поверхности нагрева T_w больше температуры насыщения жидкости T'' , то при некотором перепаде

$$\Delta T = T_w - T'' \quad (\text{XII-30})$$

будут возникать паровые пузырьки на поверхности нагрева.

Если температура жидкости значительно превышает температуру насыщения при данном давлении, то будут возникать паровые пузырьки в объеме жидкости; такие условия могут возникать, например, при очень быстром уменьшении давления, под которым находится кипящая жидкость.

Пленочным кипением называют такое, при котором на поверхности нагрева образуется сплошная пленка пара, периодически прорывающегося в объем жидкости.

Введем понятие — отрывной диаметр пузыря D_0 . Таковым будем называть диаметр сферы, объем которой равен объему парового пузыря непосредственно после его отрыва от поверхности нагрева.

Вначале для простоты рассмотрим теплоотдачу в процессе кипения при свободном движении в объеме жидкости, размеры которого по всем направлениям велики по сравнению с отрывным диаметром пузыря. Такой процесс кипения (для краткости) называют **к и п е н и е м в б о л ь ш о м о б ь е м е**. В процессе подогрева вначале нагревается слой жидкости у стенки. Когда температура этого слоя станет равной температуре насыщения,

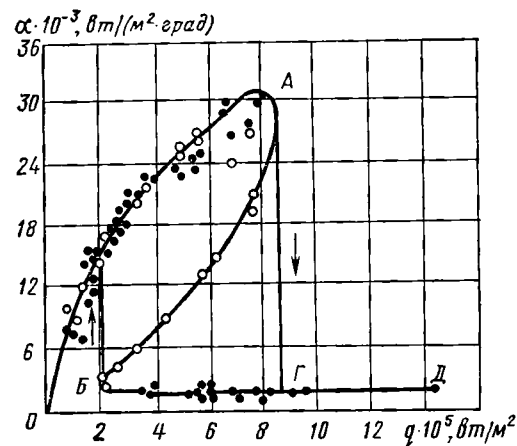


Рис. XII-2. Зависимость $\alpha = f(q)$ коэффициента теплоотдачи α от плотности теплового потока q при кипении в большом объеме воды [45]

на отдельных частях поверхности нагрева начнут зарождаться и расти пузырьки пара. Достигнув размера, соответствующего D_0 , они будут отрываться от поверхности и всплывать. Покинув слой, имеющий температуру насыщения, пузырь пара попадает в жидкость с более низкой температурой, где он конденсируется. Кипение жидкости на поверхности нагрева в условиях, когда температура жидкости вне слоя, прилегающего к поверхности, ниже температуры насыщения, называют **к и п е н и е м с н е д о г р е в о м**.

Когда вся масса жидкости будет нагрета до температуры насыщения, пузыри пара, образовавшиеся на поверхности нагрева, будут всплывать и достигать поверхности раздела жидкости и газа или пара.

Кипение жидкости в условиях, когда основная масса жидкости нагрета до температуры насыщения, называют **к и п е н и е м н а с ы щ е н н о й ж и д к о с т и**. Отметим, что кипение с недогревом и кипение насыщенной жидкости может быть как пузырьковым, так и пленочным.

На рис. XII-2 и XII-3 представлены зависимости коэффициента теплоотдачи α от плотности теплового потока q и от разности температур ΔT (рис. XII-3) при кипении жидкости в большом объеме [45]. Из рисунка видно, что с увеличением плотности теплового потока от поверхности нагрева к кипящей жидкости коэффициент теплоотдачи вначале резко возрастает от точки О до точки А на кривой $\alpha = f(q)$. Этот участок кривой соответствует пузырьковому кипению. Участок кривой от А до Б соответствует переходному режиму от пузырькового к пленочному. Однако, если тепловой поток создается не-

зависимо от процесса теплообмена в кипящей жидкости, например, путем электронагрева, то переход от пузырькового кипения к пленочному происходит по линии $АГ$.

Участок от $Б$ до $Д$ соответствует пленочному кипению. Из рисунка видно, что коэффициент теплоотдачи при пленочном кипении значительно меньше, чем при пузырьковом.

При пленочном кипении кипящая жидкость отделена от поверхности нагрева пленкой пара, которая создает дополнительное тепловое сопротивление. Нежелательно допускать работу теплообменных аппаратов при пленочном кипении. Уже сам факт снижения коэффициента

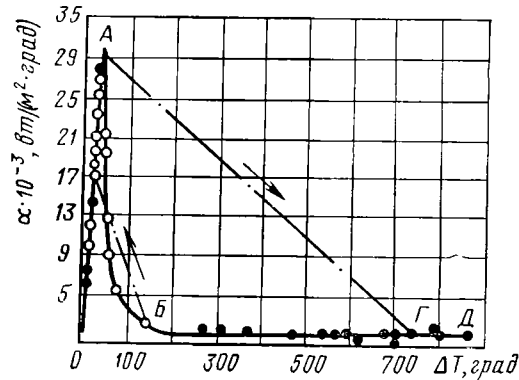


Рис. XII-3. Зависимость $\alpha = f(\Delta T)$ коэффициента теплоотдачи α от разности температур поверхности нагрева и насыщения воды $\Delta T = T_w - T''$ [45]

теплообмена излучением будет увеличиваться по мере увеличения температуры стенки. Однако доля лучистого потока теплоты в суммарном тепловом потоке оказывается ощутимой только при очень высоких температурах стенки.

Допустим, что в большом объеме происходит пленочное кипение при условиях, соответствующих точке $Д$ (рис. XII-2 и XII-3). Уменьшив плотность теплового потока, переведем пленочное кипение в пузырьковое. Этот переход происходит при условиях, соответствующих точке $Б$.

Максимально возможная при данных условиях плотность теплового потока при пузырьковом кипении называется критической плотностью теплового потока и обозначается $q_{кр}$. При кипении в большом объеме критическая плотность теплового потока соответствует условиям точки $А$.

Отметим, что при условиях, соответствующих отрезкам кривых $\alpha = f(q)$ и $\alpha = f(\Delta T)$ (рис. XII-2 и XII-3), лежащих в диапазоне от q_A до q_B , возможно одновременное протекание процессов пузырькового и пленочного кипения на разных частях поверхности нагрева.

Перейдем к подробному изучению процессов пузырькового кипения и теплоотдачи в большом объеме жидкости.

Пузырьковое кипение жидкости в большом объеме

Пузыри пара зарождаются в центрах парообразования. В объеме чистой жидкости (очищенной от мельчайших твердых частиц и пузырьков газа) *центрами парообразования являются отдельные элементарные объемы (точки)*, в которых наблюдается разрежение молекул, вызванное их случайной флуктуацией. Такие элементарные объемы называют *зонами разрежения*.

Если жидкость перегрета, т. е. если ее температура $T_{ж}$ выше своей собственной равновесной температуры насыщения T'' при данном давлении, то в таком элементарном объеме может зародиться паровой пузырь.

Определим минимальный перегрев $\Delta T = T_{ж} - T''$, при котором возможно существование парового пузыря. Для простоты будем считать, что паровой пузырь представляет собой сферу. Можно показать, что давление пара в пузыре будет больше давления окружающей жидкости, следовательно, и температура насыщения в паровом пузыре T_R'' будет больше температуры насыщения над плоской поверхностью T'' при данном давлении жидкости. Следовательно, искомый минимальный перегрев должен быть равен $\Delta T = T_R'' - T''$. Выразим его через параметры двухфазной среды. Для этого вначале найдем превышение давления в пузыре по сравнению с давлением жидкости. На сферической поверхности раздела (границе) жидкой и паровой фаз возникает скачок давления. Перепад давления в скачке можно определить по формуле Лапласа

$$\Delta p_{г\text{р}} = \frac{2\sigma}{R}, \quad (\text{XII-31})$$

где $\Delta p_{г\text{р}}$ — превышение давления в паровом пузыре радиуса R , н/м^2 ;

σ — коэффициент поверхностного натяжения между жидкостью и паром, н/м .

Между паром в пузыре и жидкостью возникает дополнительный перепад давления, который можно определить из выражения

$$\Delta p = \frac{\rho''}{\rho - \rho''} \Delta p_{г\text{р}}. \quad (\text{XII-32})$$

Используя выражения (XII-31) и (XII-32), можно найти равновесную температуру насыщения в паровом пузыре

$$T_R'' = T'' + \frac{dT}{dp} (\Delta p_{г\text{р}} + \Delta p'') = T'' + \frac{dT}{dp} \frac{2\sigma\rho}{R(\rho - \rho'')}. \quad (\text{XII-33})$$

Из уравнения Клапейрона — Клаузиуса следует

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T''(\rho - \rho'')}{r\rho\rho''}, \quad (\text{XII-34})$$

где ρ , ρ'' — плотность жидкости и пара, кг/м^3 .

Совмещая (XII-33) и (XII-34), найдем минимальный перегрев жидкости, при котором может существовать паровой пузырек с минимально возможным радиусом R_{min}

$$\Delta T = T_R'' - T'' = \frac{2T''\sigma}{r\rho''R_{min}} \quad (XII-35)$$

Отметим, что в полученном выражении радиус R_{min} удовлетворяет условиям термодинамического равновесия фаз.

Из (XII-35) следует, что паровые пузыри, радиус которых меньше R_{min} , при минимальном перегреве ΔT должны исчезнуть; паровые пузыри, радиус которых больше R_{min} , при том же перегреве ΔT будут расти.

Исследования показали, что радиус большинства появляющихся зон разрежения оказывается на несколько порядков меньше R_{min} . Зоны разрежения, радиус которых больше R_{min} , появляются крайне редко. Установлено, например, что в воде такая зона с размером равновесного пузыря появляется один раз в час в каждом 15 см^3 [69]. Следовательно, зоны разрежения молекул не оказывают существенного влияния на процесс пузырькового кипения в объеме жидкости.

Технические жидкости обычно не подвергаются специальной очистке, и в них имеются мельчайшие инородные частицы и микроскопические газовые пузыри. Эти объекты и являются центрами парообразования.

Превышение давления в сферическом пузырьке, содержащем газ и пар, можно определить по следующей формуле:

$$\Delta p_{rp} = \frac{2\sigma}{R} - p_i, \quad (XII-36)$$

где p_i — давление газа, зависящее от массы газа, содержащегося в пузырьке.

Важной характеристикой пузырьков, содержащих газ и пар, является критический радиус, представляющий собой максимальный радиус, при котором пузырек, содержащий $G \text{ кг}$ газа, остается устойчивым. Величину критического радиуса можно определить по формуле [69]

$$R_{кр} = \frac{4\sigma}{3\Delta p_{rp}}, \quad (XII-37)$$

где Δp_{rp} определяют по (XII-36).

Сравнивая поведение пузырьков одного с радиусом, который соответствует термодинамическому равновесию фаз (XII-35), другого с критическим радиусом (XII-37), установили следующее:

если пузырек пара, содержащий смесь (газ + пар), имеет радиус, меньший равновесного, то он будет расти до равновесного размера; если пузырек, содержащий смесь, имеет радиус, больший равновесного, но меньший критического, он будет уменьшаться до равновесного размера.

В обоих рассмотренных случаях пузырек сохраняет свой равновесный размер при заданном нагреве жидкости. Процесс образования пара будет продолжаться только в тех пузырьках, размер которых превышает критический ($R_{кр}$), только такие пузырьки могут расти.

В пузырьке с критическим радиусом при уменьшении массы газа возрастает избыточное давление Δp_{rp} , при этом уменьшается величина критического радиуса.

На твердой поверхности нагрева центрами парообразования являются небольшие углубления и трещинки, заполненные газом или паром. Такие неровности обычно возникают на поверхности в процессе изготовления элементов теплообменников, например, труб или плоских стенок.

Для изучения процесса в таких центрах были проведены следующие опыты [69]. Обследовался процесс парообразования в искусственно созданном коническом углублении на полированной поверхности медной пластины. Углубление получали путем вдавливания в медь иглы с углом при вершине, равном 18° . Пластина с одним углублением погружалась в воду. Вода нагревалась медленно, так чтобы температуры воды и пластины постоянно были одинаковы. Нагревание производилось до тех пор, пока не начинался стабильный процесс образования пузырьков в углублении, их отрыв от поверхности и всплывание. В этот момент измерялась величина перегрева воды. Результаты опытов представлены на рис. XII-4 в виде точек. Сплошные линии построены по уравнению (XII-35), при расчете в него подставлялся радиус углубления. Из рисунка видно, что величины перегрева, полученные путем расчета и путем измерения, удовлетворительно совпадают.

Эксперимент показывает, что процессы зарождения новой фазы в пузырьке газа и в углублении, наполненном газом, одинаковы и могут протекать при очень малом перегреве жидкости. В реальных условиях на технических поверхностях, например на металлических, процесс кипения при атмосферном давлении начинается при малом перегреве жидкости всего в несколько градусов. Если в качестве поверхности нагрева использовать стекло, на котором значительно меньше малых углублений, чем, например, на металле, то оказывается, что процесс кипения при атмосферном давлении начинается при перегреве примерно в 50°C .

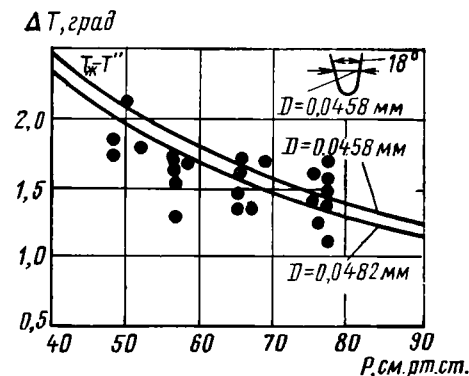


Рис. XII-4. Перегрев воды $T_{ж} - T''$, необходимый для начала непрерывно повторяющегося образования пузырей в коническом углублении: — по уравнению XII-35, ● — опытные данные [69]

Результаты эксперимента, с учетом сказанного выше, подтверждают предположение о том, что центрами парообразования на твердой поверхности нагрева являются малые углубления и трещинки, заполненные газом или паром. Со временем газ, заполняющий углубление, может израсходоваться. Однако пар, образующийся в коническом углублении, не весь расходуется на образование очередного пузыря. Часть пара, остающаяся на дне углубления, будет служить зародышем новой фазы (пара). Если размеры зародыша превышают равновесный размер пузырька пара при данном перегреве жидкости, то зародыш называют *жизнеспособным*, так как из него будет непрерывно развиваться пузырьки пара, отрываться от поверхности и всплывать.

Все зародыши новой фазы на поверхности нагрева, размеры которых несколько превышают равновесный или критический размер пузыря, являются жизнеспособными при данном перегреве жидкости. При увеличении перегрева жидкости число жизнеспособных зародышей увеличится. Из формулы (XII-35) следует, что большему ΔT соответствует меньший R_{min} , т. е. зародыши, которые при данном перегреве из-за малых размеров были нежизнеспособными, при более высоком перегреве становятся жизнеспособными.

Рост пузырей происходит следующим образом. Пусть жидкость имеет минимальный перегрев и в этих условиях существует пузырек пара с минимальным радиусом (XII-35). При очень малом увеличении размера пузырька, например, вследствие проникновения в объем пара нескольких молекул из воды, равновесие нарушится и начнется очень быстрый его рост. Поясним это.

Увеличение размера пузырька приводит к уменьшению сил поверхностного натяжения и к уменьшению давления внутри пузырька (XII-31); последнее обстоятельство приводит к увеличению интенсивности испарения жидкости. Однако испарение жидкости вызывает понижение ее температуры в окрестности пузырька, что приводит к значительному уменьшению скорости роста пузыря. В процессе роста пузырька растет и его подъемная сила. Возрастая, подъемная сила достигает такого значения, при котором происходит отрыв пузырька от поверхности нагрева и последующее всплывание. Однако отрыв пузырька происходит не только под действием подъемной силы, в этом процессе может участвовать и другая сила.

При росте пузырь на поверхности нагрева приводит в движение некоторый столб жидкости над собой. В то же время пузырь проникает в слой жидкости с меньшим перегревом, чем на поверхности нагрева, его рост замедляется. При этом восходящий по инерции поток жидкости над пузырьком отрывает его от поверхности.

В экспериментальной работе [69] было установлено, что процесс роста пузыря в большом объеме жидкости при температуре насыщения длится $1/40$ сек. После отрыва пузыря следует пауза продолжительностью примерно в $1/40$ сек, и только после нее начинается рост следующего пузыря. После отрыва пузыря поверхность, на которой он образовался, охлаждена; вода, которая поступает на место всплывшего пузыря, также несколько охлаждена, поэтому требуется время (пауза) на подогрев и того и другого.

Частота образования паровых пузырей u , измеряемая в $1/\text{сек}$, зависит от размера отрывного диаметра пузыря D_0 . Опыты показывают, что эта зависимость приближенно описывается гиперболой, т. е.

$$D_0 u \approx \text{const.} \quad (\text{XII-38})$$

Величина $D_0 u$, измеряемой в м/сек , характеризует скорость роста парового пузыря на поверхности нагрева; она зависит от многих факторов и ее аналитическое определение пока невозможно. Для воды и четыреххлористого углерода (CCl_4) эта величина равна $D_0 u = 280 \text{ м/сек}$ [69]. Однако в некоторых работах получены другие данные [79b].

Скорость роста парового пузыря оказывает существенное влияние на гидродинамическую обстановку в слое жидкости, непосредственно прилегающем к поверхности нагрева; рост и отрыв пузырей турбулируют этот слой и приводят к интенсификации теплоотдачи.

Если повысить давление, под которым находится кипящая жидкость, то интенсивность теплоотдачи увеличится. С увеличением этого давления увеличивается и температура насыщения, при этом уменьшается коэффициент поверхностного натяжения σ . В результате величина требуемого перегрева $T_w - T''$ для поддержания процесса пузырькового кипения снижается. В этих условиях увеличивается число жизнеспособных зародышей новой фазы вследствие активизации более мелких центров парообразования, что и приводит к интенсификации теплоотдачи.

Теплоотдача при пузырьковом кипении жидкости в большом объеме

Аналитическое определение теплоотдачи путем решения некоторой системы уравнений для этого процесса пока невозможно. Теплоотдача при пузырьковом кипении от поверхности нагрева к жидкости определяется экспериментально, а результаты представляются в критериальной форме. Установлено, что в процессе кипения теплота передается в основном к жидкости и только небольшое ее количество (несколько процентов) к пару.

Отметим, что при малой разности температур $\Delta T = T_w - T''$ стенки T_w и жидкости T'' перенос теплоты осуществляется путем свободной конвекции жидкости. Увеличивая ΔT , можно вызвать процесс пузырькового кипения, при котором движение жидкости обусловлено возникновением, ростом, отрывом и всплыванием пузырей пара. В дальнейшем будет обсуждаться *развитый* процесс пузырькового кипения. Таковым называют процесс, при котором доля теплоты, переносимая путем свободной конвекции, мала и ею можно пренебречь.

Путем анализа системы уравнений для процесса теплоотдачи получены соответствующие критерии. Эти критерии были получены по методу, изложенному в гл. III. Наряду с уже известными числами и критериями, такими как Nu , Re , Pr и т. п., получены новые, характерные для процесса кипения. Из числа новых критериев будет рассмотрен только один, который использован при составлении критери-

ального уравнения, приведенного здесь. С другими можно познакомиться в специальной литературе [45].

Из условия теплового взаимодействия на границе раздела фаз

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{гр}} = r \rho'' w_n'' \quad (\text{XII-39})$$

где w_n'' — скорость течения пара в двухфазной системе, м/сек, получен следующий критерий:

$$K_* = \frac{q}{r \rho'' w_n''} \quad (\text{XII-40})$$

Величина $q/r\rho''$, измеряемая в $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{ч})$, может рассматриваться как масштаб скоростей движения элементов жидкости, когда движение жидкости вызвано процессом парообразования.

Установлено, что процесс парообразования практически не зависит от размера поверхности нагрева и высоты уровня жидкости над ней. Поэтому критериальные уравнения (гл. III) для теплоотдачи при развитом кипении должны составляться так, чтобы размер не оказывал влияния на искомую величину. В связи с этим в критерии в качестве определяющего размера вводят величину

$$l_* = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho - \rho')}} \quad (\text{XII-41})$$

Найдем зависимость между следующими критериями:

$$\text{Nu}_* \approx f(\text{Re}_*; K_*; \text{Pr}) \quad (\text{XII-42})$$

где

$$\text{Nu}_* = \frac{\alpha l}{\lambda} \text{ — число Нуссельта;}$$

$$\text{Re}_* = \frac{\rho'' w_n'' l_*}{\mu''} \text{ — критерий Рейнольдса.}$$

Отметим, что приведенная зависимость не учитывает влияние всех критериев, полученных для теплоотдачи при кипении. Кроме того, выражение (XII-42) не учитывает факторов, определяющих центры парообразования, так как сделать это вообще пока не удалось. По указанным причинам эта зависимость является приближенной. Однако показано, что зависимости вида (XII-42) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные.

Составим новый определяющий критерий путем объединения критериев Re_* и K_*

$$\text{Re}_* \cdot K_* = \frac{\rho'' w_n'' l_*}{\mu''} \cdot \frac{q}{r \rho'' w_n''} = \frac{q}{\mu'' r} l_*;$$

в расчетную зависимость новый критерий вводится в форме

$$\frac{q}{\mu_{\text{ж}} r} l_*.$$

Формула для определения коэффициента теплоотдачи, полученная в работе [69], имеет вид

$$\text{Nu}_* = \frac{1}{c_*} \left(\frac{q}{\mu_{\text{ж}} r} l_* \right)^{0,667} \text{Pr}_{\text{ж}}^{-0,7}, \quad (\text{XII-43})$$

где $\text{Pr}_{\text{ж}} = \frac{c_{\text{ж}} \mu_{\text{ж}}}{\lambda_{\text{ж}}}$ — критерий Прандтля жидкости.

Величина c_* зависит от угла смачивания θ (рис. XII-5, а, б), а следовательно, от комбинации жидкость — поверхность; значения величины c_* приведены в табл. XII-2.

Формула (XII-43) с точностью до $\pm 20\%$ обобщает опытные данные по теплоотдаче при пузырьковом кипении в большом объеме в широком диапазоне изменения давлений жидкости примерно от 1 бар до 170 бар.

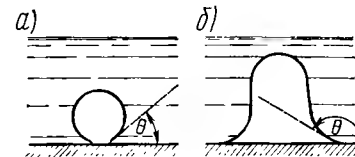


Рис. XII-5. Форма паровых пузырьков на смачиваемой (а) и не смачиваемой (б) поверхностях

Таблица XII-2

Комбинация жидкость — поверхность	c_*	Комбинация жидкость — поверхность	c_*
Вода — никель	0,006	n-Пентан — хром	0,015
Вода — платина	0,013	Этиловый спирт — хром	0,0027
Вода — медь	0,013	Изопропиловый спирт — медь	0,0025
Вода — латунь	0,006	35% K_2CO_3 — медь	0,0054
CCl_4 — медь	0,013	50% K_2CO_3 — медь	0,0027
Бензол — хром	0,010	n-бутиловый спирт — медь	0,0030

Теплоотдача при пузырьковом кипении в условиях вынужденной конвекции жидкости

Пусть процесс пузырькового кипения происходит в трубе, по которой течет жидкость. Вынужденное движение жидкости может привести к более интенсивной теплоотдаче по сравнению со случаем кипения в большом объеме при свободном движении жидкости. Увеличение интенсивности теплоотдачи произойдет в том случае, когда турбулентные возмущения, вызванные вынужденным движением жидкости, станут больше тех, которые вызваны пузырьковым парообразованием.

Возможен другой случай, когда плотность теплового потока столь велика, что вызывает такие большие турбулентные возмущения, которые остаются больше вызванных вынужденным движением жидкости. В этом втором случае коэффициент теплоотдачи будет зависеть от теплового потока так же, как при пузырьковом кипении в большом объеме.

Разработано несколько методов определения коэффициента теплоотдачи при пузырьковом кипении в условиях вынужденного движения жидкости. Например, предложена следующая формула [45]:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \sqrt[n]{1 + \left(\frac{\alpha_{00}}{\alpha_0}\right)^n}, \quad (\text{XII-44})$$

где α — коэффициент теплоотдачи к вынужденному потоку кипящей жидкости, искомая величина;
 α_0 — коэффициент теплоотдачи к вынужденному потоку некипящей жидкости (гл. X);
 α_{00} — коэффициент теплоотдачи при развитом кипении, когда скорость вынужденного потока кипящей жидкости уже не оказывает на него влияния.

Для условий кипения воды в чистой трубе, при ее скоростях от 0,5 м/сек до 6,7 м/сек и тепловых потоках от $2 \cdot 10^5 \text{ вт/м}^2$ до $10 \cdot 10^5 \text{ вт/м}^2$, найдено, что в (XII-44) $n = 2$. Величину α_{00} определяют по следующей формуле:

$$\alpha_{00} = C q^{0,7}, \quad (\text{XII-45})$$

где C — множитель пропорциональности, зависящий от давления. Например, по опытам с кипением воды в трубах найдено:

$$p \cdot 10^{-5}, \text{ н/м}^2 = \begin{matrix} 10 & 20 & 40 & 80 & 140 \\ C \approx 3,2 & 3,7 & 4,3 & 6,4 & 11,2 \end{matrix}$$

Отметим, что формула (XII-45) пригодна для двухфазного потока, в котором объемное паросодержание меньше чем 0,7.

При кипении жидкости в трубах различают три следующие зоны:

1) зона подогрева длиной L_1 ;

ее границы от входа жидкости в обогреваемую часть трубы до сечения, в котором температура стенки достигает значения температуры насыщения. Здесь происходит конвективный теплообмен, описанный ранее в гл. X;

2) зона закипания жидкости длиной $L_2 - L_1$;

здесь происходит нагрев всей жидкости до температуры насыщения;

3) зона кипения начинается от сечения L_2 и простирается вниз по потоку.

Изложению методов определения коэффициентов теплоотдачи в третьей зоне и посвящен настоящий параграф. Для простоты распространяют эти методы и на вторую зону; она начинается от сечения, расположенного от входа жидкости в обогреваемую часть трубы на расстоянии L_1 .

Это расстояние L_1 можно определить по формуле [45]

$$\frac{L_1}{D} = \frac{c p w_0}{4 q} (T_1'' - T_1) - 10,4 \left(\frac{v}{a}\right)^{0,4} \left(\frac{w_0 D}{v}\right)^{0,8}, \quad (\text{XII-46})$$

где w_0 — скорость жидкости, м/сек;

T_1'' — температура насыщения в сечении на расстоянии L_1 от входа в трубу;

T_1 — температура жидкости при входе в обогреваемую часть трубы;

D — диаметр трубы.

Теплоотдача при пленочном кипении в условиях свободной и вынужденной конвекции жидкости

Рассмотрим процесс теплоотдачи при пленочном кипении жидкости на вертикальной пластине для условий ламинарного течения пленки пара.

Ранее в § 1 настоящей главы был рассмотрен способ аналитического определения толщины пленки конденсата путем решения соответствующей системы уравнений и граничных условий. Для пленок конденсата и пара при их ламинарном течении используется одна и та же система уравнений. Толщина пленки пара, так же как и конденсата, может быть определена аналитически. Здесь будут приведены конечные результаты решения системы уравнений и граничных условий, описывающих ламинарное течение пленки пара.

Подставляя в выражение

$$\alpha_x = \frac{\lambda''}{\delta''} \quad (\text{XII-47})$$

найденную аналитически зависимость для толщины пленки пара δ'' , получают формулу, по которой можно определить локальный коэффициент теплоотдачи α_x .

Для случая свободной конвекции жидкости такая формула имеет вид [45]

$$\alpha_x = \beta \lambda'' \sqrt[3]{\frac{\Phi r \rho'' g (\rho - \rho'')}{\mu'' q x}}, \quad (\text{XII-48})$$

где

$$\Phi = 1 + \frac{c_p'' \Delta T}{2r};$$

значение β изменяется от 0,436 до 0,690, соответственно для двух следующих предельных режимов течения:

первый предельный режим течения — скорость движения жидкости на границе раздела фаз равна нулю, т. е. $w_{\text{гр}} = 0$;

второй предельный режим течения — вся масса жидкости движется со скоростью, равной скорости пара на границе раздела фаз, при этом $\left(\frac{dw''}{dy}\right)_{\text{гр}} = 0$.

Средний коэффициент теплоотдачи для пластины длиной L находят из выражения

$$\bar{\alpha} = \frac{3}{2} \alpha_x. \quad (\text{XII-49})$$

При пленочном кипении теплота переносится конвекцией и радиацией (теплообмен излучением). Поэтому коэффициент теплоотдачи в этих условиях представляет собой сумму

$$\alpha_{\text{сум}} = \alpha_{\text{к}} + \alpha_{\text{р}}, \quad (\text{XII-50})$$

где $\alpha_{\text{к}}$ — коэффициент теплоотдачи конвекцией (XII-48 и XII-49);
 $\alpha_{\text{р}}$ — коэффициент теплоотдачи радиацией (см. гл. XIII).

Для определения локального коэффициента теплоотдачи α_x при вынужденном движении жидкости получена формула, учитывающая как конвективный, так и радиационный перенос теплоты, она имеет следующий вид:

$$\alpha_x = \beta_1 \sqrt[4]{\frac{\lambda''^3 \varphi r \rho'' g (\rho - \rho'')}{\mu'' \Delta T x (1 + \psi)}}. \quad (\text{XII-51})$$

При выводе формулы (XII-51) были сделаны следующие допущения: предполагалось, что отношение коэффициентов теплоотдачи конвекцией и радиацией есть величина постоянная

$$\frac{\alpha_p}{\alpha} = \frac{\alpha_p \delta''}{\lambda''} = \text{const};$$

влиянием подъемной силы можно пренебречь.

В формуле (XII-51) $\psi = \frac{\alpha_p}{\alpha}$; коэффициент β_1 изменяется от 0,500 до 0,705, соответственно для двух предельных режимов течения. Предельные значения β_1 , равные 0,500 и 0,705, определены теоретически.

Средний коэффициент теплоотдачи для пластины длиной L находят из выражения

$$\bar{\alpha} = \frac{4}{3} \beta_1 \sqrt[4]{\frac{\lambda''^3 \varphi r \rho'' g (\rho - \rho'')}{\mu'' \Delta T L (1 + \psi)}}. \quad (\text{XII-52})$$

Сопоставление результатов расчета по (XII-52) с результатами измерений для нескольких различных жидкостей при различных режимах течения показало, что значения коэффициентов β_1 , найденных экспериментально, изменяются от 0,500 до 0,705, т. е. не выходят за пределы значений, найденных теоретически.

§ 3. КРИТИЧЕСКАЯ ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

В начале перехода от пузырькового кипения к пленочному происходит изменение механизма теплоотдачи — это явление называют кризисом теплоотдачи при кипении.

Максимально возможную при данных условиях плотность теплового потока при пузырьковом кипении называют первой критической плотностью теплового потока. Например, при кипении в большом объеме она соответствует точке A (см. рис. XII-2). Минимально возможную (при данных условиях) плотность теплового потока при пленочном кипении называют второй критической плотностью теплового потока; при кипении в большом объеме она соответствует точке B . Наибольшее практическое значение имеет первая критическая плотность теплового потока, поэтому в дальнейшем будет обсуждаться только она ($q_{кр}$), а слово «первая» в ее названии будет опущено.

Рассмотрим далее способы определения величины $q_{кр}$ при кипении в большом объеме, т. е. в условиях свободной конвекции жидкости

и при кипении в условиях вынужденной. Схему перехода от пузырькового кипения к пленочному можно представить следующим образом. По мере увеличения перегрева $\Delta T = T_w - T''$ увеличивается число центров парообразования. При некотором ΔT паровые пузыри покроют всю поверхность нагрева, примерно так же, как твердые шарики одного размера, прилегающие друг к другу и лежащие на ней в один ряд. По-видимому, в условиях, близких к этим, следует ожидать реализации критической плотности теплового потока, так как турбулизация жидкости всплывающими пузырями будет максимальной.

При дальнейшем, даже малом увеличении ΔT слой паровых пузырей может превратиться в сплошную паровую пленку, которая оттеснит жидкость от поверхности нагрева. В результате изменится механизм переноса теплоты и коэффициент теплоотдачи резко уменьшится (линия AB , см. рис. XII-3), т. е. возникнет кризис теплоотдачи. Возникающая на поверхности нагрева паровая пленка сохраняется как при данном перегреве ΔT , так и при его дальнейшем увеличении, пар в нее будет поступать (вдуваться) со стороны жидкости. Моделью такого явления может служить *барботаж* — процесс вдувания газа в жидкость через пористую поверхность.

Пусть газ вдувается в неограниченном объеме жидкости через горизонтальную неограниченную пористую поверхность; жидкость над поверхностью невязкая ($\mu \rightarrow 0$), последнее допущение позволяет не учитывать силы трения в ней. При некотором динамическом напоре вдуваемого газа $\rho'' w''^2$ будет происходить непрерывно повторяющееся образование газовых пузырей и их последующее всплывание на всей поверхности пластины. Увеличивая динамический напор, можно получить такое его значение $\rho'' w''_{кр}^2$, при котором пузыри сольются в сплошной слой газа, который оттеснит жидкость от поверхности; работа, затрачиваемая на оттеснение жидкости, может быть определена из выражения $g\delta(\rho' - \rho'')$, где δ — средняя толщина газового слоя, равная $\delta \sim \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}} \cdot m$; ρ' и ρ'' — плотности жидкости и газа

Слияние пузырей в сплошной слой газа на пористой поверхности происходит при определенном постоянном отношении динамического напора к работе оттеснения невязкой жидкости

$$\frac{\rho'' w''_{кр}^2}{g\delta(\rho' - \rho'')} \sim \frac{\rho'' w''_{кр}^2}{\sqrt{g\sigma(\rho' - \rho'')}} = \text{const}, \quad (\text{XII-53})$$

где $w''_{кр}$ — критический объемный расход газа с единицы площади пластины.

Следующее отношение называют критерием устойчивости пузырьковой структуры двухфазного граничного слоя и обозначают через k

$$k = \frac{w''_{кр} \sqrt{\rho''}}{\sqrt[4]{g\sigma(\rho' - \rho'')}}. \quad (\text{XII-54})$$

Полученный критерий устойчивости k можно использовать при анализе перехода от пузырькового к пленочному кипению жидкости в большом объеме. Используя (XII-40), получим выражение для критического объемного расхода пара при кипении

$$\omega_{кр}'' = \frac{q_{кр}}{r\rho''}. \quad (\text{XII-55})$$

Для условий вдува газа через горизонтальную неограниченную пористую пластину в неограниченный объем в целом неподвижной, невязкой ($\mu \rightarrow 0$) жидкости критерий k будет величиной постоянной, т. е. $k = \text{const}$.

Формулу для определения критической плотности теплового потока при кипении насыщенной жидкости ($\mu \rightarrow 0$) в большом объеме получим, совместив выражения (XII-54) и (XII-55),

$$q_{кр \text{ б.о.}} = kr \sqrt{\rho''} \sqrt[4]{g\sigma(\rho' - \rho'')}, \quad (\text{XII-56})$$

где k — константа, например, для воды, равная 0,13.

Формула (XII-56) подтверждена экспериментально при исследовании кипения в большом объеме как при атмосферном

давлении, так и в широком диапазоне изменения давления. Например, на рис. XII-6 приведена зависимость $q_{кр}$, полученная по (XII-56) от давления, под которым находится жидкость, там же (точками) нанесены экспериментальные данные. На $q_{кр}$ при кипении в большом объеме оказывает влияние шероховатость поверхности нагрева, ее расположение по отношению к направлению вектора силы тяжести и недогрев жидкости $\Delta T_{нед} = T' - T_{ж}$. Все эти факторы не учтены в формуле (XII-56).

Для шероховатых поверхностей, например металлических, $q_{кр}$ больше, чем для гладких, например стеклянных, при прочих равных условиях. Считают, что на шероховатых поверхностях жидкая пленка более устойчива.

Для вертикальных пластин $q_{кр}$ меньше, чем для горизонтальных, так как в нижней части первых создаются благоприятные условия для слияния пузырей в паровую пленку.

Недогрев жидкости $\Delta T_{нед}$ приводит к увеличению критической плотности теплового потока. Формулы для определения этой величины получают введением в правую часть (XII-56) некоторого члена, учитывающего теплоотдачу к толще недогретой жидкости [45, 46, 73, 78].

Критическая плотность теплового потока в случае, когда жидкость движется вдоль поверхности нагрева, увеличивается по сравнению с критической плотностью при кипении в большом объеме; например, при обтекании пластины насыщенной жидкостью с умеренной скоростью получена следующая формула для определения этой величины:

$$q_{кр} \approx q_{кр \text{ б.о.}} + k_0 r \sqrt{\rho' \rho''} \omega'_0, \quad (\text{XII-57})$$

где $q_{кр \text{ б.о.}}$ — критическая плотность теплового потока при кипении в большом объеме, определяемая по (XII-56);

ω'_0 — объемная скорость жидкости, отнесенная к полному сечению канала;

$$k_0 = 2C_f \Phi_* (1 - \Phi_*);$$

Φ_* — паросодержание пристенного двухфазного слоя, при кризисе кипения

$$\Phi_* = \frac{\pi}{4};$$

C_f — коэффициент трения (гл. VII).

Экспериментально получено значение константы, равное $k_0 = 0,0012$.

Недогрев ядра движущейся жидкости может привести к увеличению критической плотности теплового потока. Кризис кипения в трубах в настоящей книге не рассмотрен, с этим вопросом можно ознакомиться в специальной литературе [например, 69].

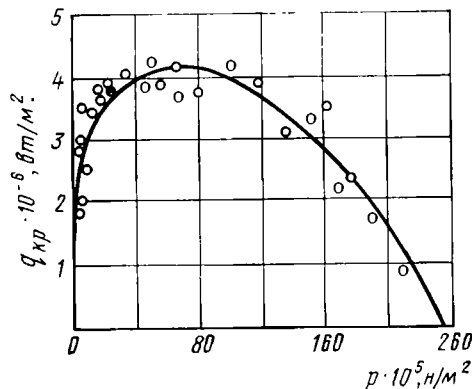


Рис. XII-6. Зависимость $q_{кр} = f(p)$ критической плотности теплового потока от давления при кипении воды в большом объеме [45]

ТЕПЛОБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Нагретые тела (среды) являются источниками энергии излучения; последняя представляет собой энергию фотонов или электромагнитных волн. В массе нагретого тела (среды) происходят сложные внутримолекулярные и внутриатомные возмущения, в результате которых внутренняя энергия этого тела частично превращается в энергию излучения. Процесс возникновения излучения вследствие превращения внутренней энергии излучающего тела (среды) в энергию излучения называют **и с п у с к а н и е м***

Носителями энергии излучения являются электромагнитные волны, в вакууме они распространяются со скоростью света, равной примерно $c = 300 \cdot 10^8$ м/сек и характеризуются длиной волны λ и частотой колебаний ν . Перечисленные величины связаны между собой следующим соотношением:

$$c = \nu \lambda. \quad (\text{XIII-1})$$

В зависимости от длины волны λ различают ультрафиолетовое излучение, видимый свет, инфракрасное излучение и др. (рис. XIII-1).

Энергия теплового излучения переносится электромагнитными волнами, длина которых (в микронах) лежит примерно в диапазоне $0,3 \text{ мк} \leq \lambda \leq 50 \text{ мк}$. Носители энергии излучения наряду с волновыми обладают и корпускулярными свойствами. Излучение можно рассматривать как поток неких частиц, которые называют **ф о т о н а м и**, или **с в е т о в ы м и к в а н т а м и**. Под термином «излучение» («радиация») понимается совокупность электромагнитных волн или фотонов.

Энергия квантов связана с частотой колебаний эквивалентного электромагнитного поля. Выражение для энергии одного кванта можно представить в виде

$$\epsilon = h\nu, \quad (\text{XIII-2})$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек — постоянная Планка.

Электромагнитные волны, или кванты, обладают не только энергией, но и импульсом [31], абсолютная величина которого для одного кванта равна $\frac{h\nu}{c}$.

Теплообмен излучением между двумя телами нагретым (с температурой T_1) и холодным (с температурой T_2) ($T_1 > T_2$) происхо-

дит следующим образом: нагретое тело испускает энергию в окружающее пространство в форме электромагнитных волн, или фотонов, которые переносят ее к холодному телу, где происходит превращение энергии излучения во внутреннюю энергию, при этом температура холодного тела повышается. Процесс превращения энергии излучения во внутреннюю энергию поглощающего тела (среды) называют **п о г л о щ е н и е м**.

Все тела непрерывно испускают и поглощают энергию излучения; пусть два тела с одинаковой температурой составляют изолированную систему: оба тела будут непрерывно испускать и поглощать энергию излучения, однако при этом как внутренняя энергия тел, так и их температура останутся неизменными.

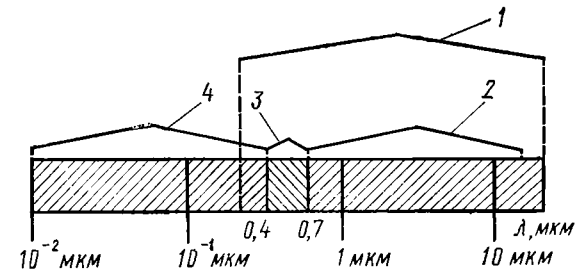


Рис. XIII-1. Классификация видов излучения:
1 — тепловое, 2 — инфракрасное, 3 — видимый свет, 4 — ультрафиолетовое

Электромагнитные колебания различной частоты, или длины волны, переносят в единицу времени с единицы поверхности излучающего тела различное количество энергии излучения. Для данного диапазона частот количество переносимой энергии зависит от температуры и физических свойств тела. Следовательно, распределение энергии по частотам спектра также зависит от температуры и физических свойств излучающего тела.

Введем понятие абсолютно черного тела.

Т е л о, которое при данной температуре характеризуется наибольшей энергией излучения для всех частот по сравнению с собственным излучением других (нечерных) тел, называют **а б с о л ю т н о ч е р н ы м**. Значит абсолютно черное тело испускает максимально возможное тепловое излучение при данной температуре. В то же время абсолютно черное тело полностью поглощает все падающее на него излучение. В качестве модели абсолютно черного тела для поглощения излучения может служить, например, полая сфера с очень малым отверстием в оболочке, площадь которого F_1 много меньше площади внутренней поверхности сферы F , т. е. $F_1/F \ll 1$.

Внешнее излучение, проникшее внутрь сферы, практически полностью поглощается, так как обратный выход излучения, в результате отражения от стенок, через малое отверстие затруднен. Если температуру стенок сферы поддерживать постоянной, то излучение будет на-

* Здесь, как и ранее, терминология заимствована из «Сборника рекомендуемых терминов», составленного Академией наук СССР [74].

ходиться в термодинамическом равновесии со стенками. В этих условиях энергия излучения (или объемная плотность энергии фотонов излучения) определяется только температурой стенок. Такое излучение называют **равновесным тепловым излучением**.

Твердые тела имеют непрерывный спектр излучения, а газы — прерывистый; последний содержит не все частоты, а несколько полос, каждая из которых характеризуется некоторым набором частот: например, первая от ν_1 до ν_2 , вторая от ν_3 до ν_4 и т. д., частоты от ν_2 до ν_3 в таком спектре не содержатся.

Твердые тела излучают и поглощают поверхностью (тонким слоем), а газы объемом.

Плотность потока излучения

Количество энергии излучения, переносимой в единицу времени через произвольную поверхность, называют **потоком излучения** и обозначают через $Q_{\text{и}}$. Различают монохроматический и интегральный потоки излучения. Излучение, соответствующее достаточно узкому интервалу частот (длин волн), которое можно характеризовать данным значением частоты (длины волны), называют **монохроматическим излучением**. Излучение, соответствующее всему спектру частот (длин волн) в пределах от нуля до бесконечности, называют **интегральным излучением**.

Поток излучения, проходящий через единицу поверхности по всевозможным направлениям в пределах полусферического телесного угла ($\Omega = 2\pi$), называют **плотностью потока излучения** и измеряют в ваттах на кв. метр ($\text{вт}/\text{м}^2$)

$$E = \frac{dQ_{\text{и}}}{dF} \quad (\text{XIII-3})$$

Поток объемного излучения, отнесенный к единице объема излучающей среды в пределах телесного угла ($\Omega = 4\pi$), называют **плотностью потока объемного излучения** и измеряют в ваттах на куб. метр ($\text{вт}/\text{м}^3$)

$$\eta = \frac{dQ_{\text{и}}}{dV} \quad (\text{XIII-4})$$

Интенсивность излучения

Поток излучения, распространяющийся в данном направлении и отнесенный к единице элементарного телесного угла, осью которого является выбранное направление s , и к единице поверхности, расположенной в данной точке перпендикулярно к этому направлению dF_s (рис. XIII-2), называют **интенсивностью**, или **яркостью излучения**

$$I_s = \frac{d^2Q}{dF_s d\Omega} = \frac{d^2Q}{dF_1 \cos \theta d\Omega} \quad (\text{XIII-5})$$

Здесь $d\Omega$ — элементарный телесный угол, который по определению равен отношению площади dF_2 , вырезанной элементарным телесным углом на сфере, к квадрату радиуса r этой сферы (рис. XIII-2 и XIII-3)

$$d\Omega = \frac{dF_2}{r^2} \quad (\text{XIII-6})$$

Величина площади dF_2 (рис. XIII-4) равна произведению двух дуг

$$dF_2 = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{XIII-7})$$

Для реальных неистотропных тел величина I_s (XIII-5) зависит как от координат площадки dF_1 на излучающей поверхности, так и от направления излучения (угол θ), а для изотропных — только от направления.

Излучение, интенсивность которого I не зависит ни от координат площадки dF_1 на излучающей поверхности, ни от направления излучения (угол θ), называют **диффузным**, т. е. $I_s \equiv I$. В природе нет тел, которые испускают диффузное излучение.

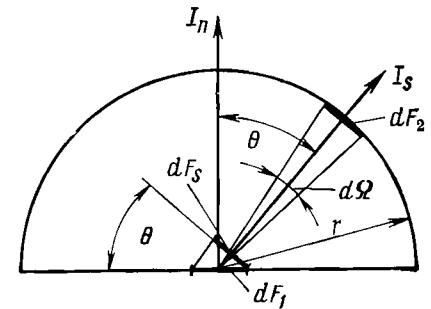


Рис. XIII-2. К определению интенсивности излучения I_s (XIII-5)

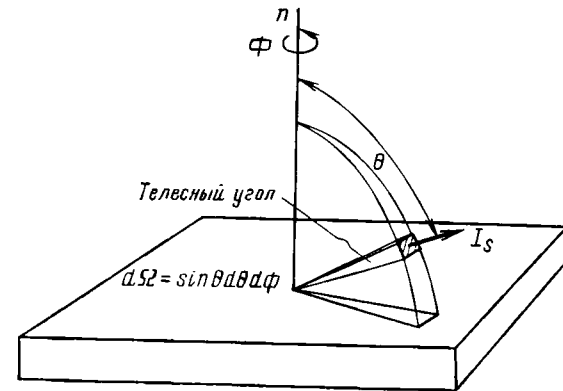


Рис. XIII-3. К определению элементарного телесного угла $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ (XIII-5 и XIII-6)

Для диффузного излучения на основании уравнений (XIII-3, XIII-5 и XIII-6) можно написать

$$E = \int_{2\pi} I_s \cos \theta d\Omega$$

или

$$E = I \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi I \quad (\text{XIII-8})$$

Выражение (XIII-8) устанавливает связь между плотностью потока излучения E и интенсивностью полусферического диффузного излучения I .

Обозначим количество энергии излучения испускаемой единицей площади поверхности в единицу времени, в единице телесного угла в произвольном направлении через

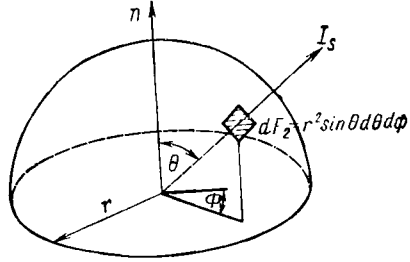


Рис. XIII-4. К определению элементарной площадки $dF_2 = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ (XIII-7)

$$I_\theta = \frac{d^2 Q}{dF_1 \Omega}. \quad (\text{XIII-9})$$

Количество энергии, испускаемое в произвольном направлении I_θ (XIII-9) при диффузном излучении, можно выразить через количество энергии, испускаемое в направлении нормали (см. рис. XIII-2), следующим образом:

$$I_\theta = I_n \cos \theta. \quad (\text{XIII-10})$$

Соотношение (XIII-10) составляет содержание закона Ламберта. Этот закон справедлив только для идеальных — диффузно излучаю-

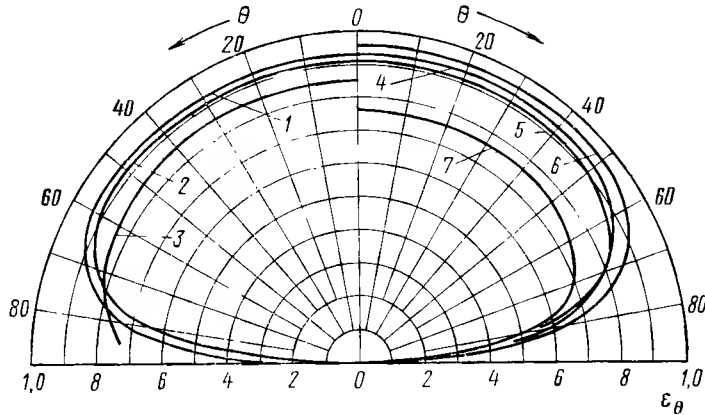


Рис. XIII-5. Зависимость $\epsilon_\theta = \frac{I_\theta}{I_{\text{черн}}} = f(\theta)$ относительной интенсивности излучения ϵ_θ от направления (угол θ) для тел — электрических изоляторов: 1 — дерево, 2 — бумага, 3 — окись алюминия (корунд), 4 — стекло, 5 — глина, 6 — лед, 7 — окись меди

щих и абсолютно черных тел. Для реальных тел зависимость I_θ от направления (угол θ) определяется экспериментально, а результаты представляются в форме

$$\epsilon_\theta = \frac{I_\theta}{I_{\text{черн}}} = f(\theta). \quad (\text{XIII-11})$$

На рис. XIII-5 представлены конкретные зависимости (XIII-11) для некоторых материалов — электрических изоляторов, а на рис. XIII-6 для некоторых металлов. Из рисунка видно, что наибольшая интенсивность излучения для электрических изоляторов лежит в диапазоне углов θ от 50° до 0° , а для металлов от 85° до 75° .

Пространственная плотность падающего излучения

В некоторых случаях при исследовании теплообмена излучением пользуются понятием *объемная плотность энергии излучения*, которая представляет собой количество энергии излучения, заключенной в единице объема. Она измеряется в джоулях на куб. метр (дж/м^3).

Количество энергии излучения, переносимой в направлении $\vec{s}$ сквозь площадку dF , расположенную нормально к $\vec{s}$ в границах телесного угла $d\Omega$ за время dt , равно

$$d^3 Q = I_s dF d\Omega dt.$$

Время dt определим из выражения $dt = dS/c$, где dS — длина пути переноса, а c — скорость перемещения носителей энергии излучения.

С учетом сказанного, объемную плотность энергии излучения можно представить в форме

$$du = \frac{d^3 Q}{dF dS} = \frac{1}{c} I_s d\Omega. \quad (\text{XIII-12})$$

Интегрируя (XIII-12) в пределах сферического угла $\Omega = 4\pi$, получим

$$u = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_s d\Omega. \quad (\text{XIII-13})$$

Пусть интенсивность излучения по всевозможным направлениям равномерна, т. е. излучение изотропно, тогда

$$u = \frac{1}{c} 4\pi I. \quad (\text{XIII-14})$$

Интегралы (XIII-13 и XIII-14) от интенсивности падающего излучения по возможным направлениям в пределах сферического телесного

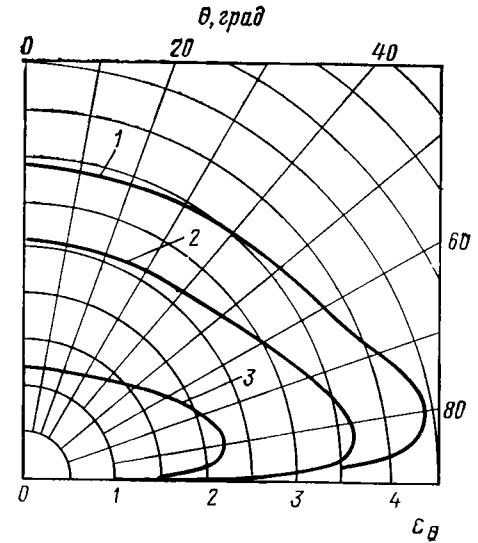


Рис. XIII-6. Зависимость $\epsilon_\theta = \frac{I_\theta}{I_{\text{черн}}} = f(\theta)$ относительной интенсивности излучения ϵ_θ от направления (угол θ) для тел электропроводников: 1 — висмут, 2 — алюминиевая бронза, 3 — железо неполированное

угла $\Omega = 4\pi$ называют пространственной плотностью падающего излучения.

Формулы, полученные для плотности потока излучения, интенсивности излучения и пространственной плотности падающего излучения, справедливы как для интегрального, так и для монохроматического излучения. В последнем случае величины, входящие в названные формулы, отмечаются индексами ν или λ . Например, формула (XIII-14) для монохроматического излучения имеет вид

$$u_\nu = \frac{1}{c} 4\pi I_\nu. \quad (\text{XIII-14a})$$

Взаимодействие потока излучения с телами (средами)

Поток излучения, падающий на тело (среду) $Q_{\text{пад}}$, в общем случае может разделиться на три части: одна будет поглощаться $Q_{\text{погл}}$, другая отражаться $Q_{\text{отр}}$, а третья проходить сквозь тело $Q_{\text{прох}}$. На основании закона сохранения энергии можно написать, что

$$Q_{\text{пад}} = Q_{\text{погл}} + Q_{\text{отр}} + Q_{\text{прох}}. \quad (\text{XIII-15})$$

Введем обозначения

$$\frac{Q_{\text{погл}}}{Q_{\text{пад}}} = A; \quad \frac{Q_{\text{отр}}}{Q_{\text{пад}}} = R; \quad \frac{Q_{\text{прох}}}{Q_{\text{пад}}} = D, \quad (\text{XIII-16})$$

где A — поглощательная способность;
 R — отражательная способность;
 D — пропускательная способность.

Различают спектральную и интегральную поглощательную, отражательную и пропускательную способности.

С учетом принятых обозначений выражение (XIII-15) можно представить в виде

$$A + R + D = 1. \quad (\text{XIII-17})$$

Рассмотрим предельные случаи.

Если для тела $R = 0$, $D = 0$ и $A = 1$, то оно поглощает всю падающую на него энергию излучения и называется **абсолютно черным**.

Если для тела $A = 0$; $D = 0$ и $R = 1$, то оно отражает всю падающую на него энергию излучения и называется либо **абсолютно белым** при диффузном отражении, либо **зеркальным** при отражении, которое следует законам геометрической оптики. Абсолютно белых или зеркальных тел в природе нет.

Если для тела $A = 0$; $R = 0$ и $D = 1$, то оно пропускает сквозь себя всю падающую на него энергию излучения и называется **абсолютно прозрачным** (прозрачным). Абсолютно прозрачных тел в природе нет.

Тела с предельными свойствами вводятся для того, чтобы можно было упростить сложную обстановку, складывающуюся при переносе теплоты излучением между реальными телами, для которых в общем случае справедливо соотношение (XIII-15).

Рассмотрим простейшую систему из двух излучающих тел — первого и второго. Плотность потока излучения, посылаемого в пространство, например первым телом, можно представить в виде суммы плотности потока собственного излучения первого тела и плотности потока отраженного излучения второго тела. Эту сумму называют **плотностью потока эффективного излучения**

$$E_{1, \text{эф}} = E_{1, \text{соб}} + E_{\text{отр}}. \quad (\text{XIII-18})$$

Плотность потока собственного излучения $E_{1, \text{соб}}$ зависит от температуры и физических свойств первого тела. Плотность потока отраженного излучения $E_{\text{отр}}$ зависит от плотности потока собственного излучения второго тела $E_{2, \text{соб}}$, которую называют **плотностью потока падающего излучения** $E_{\text{пад}}$, и поглощательной способности* первого тела A_1 . Ее можно определить из выражения

$$E_{\text{отр}} = E_{2, \text{соб}} (1 - A_1). \quad (\text{XIII-19})$$

В рассматриваемом случае количество теплоты $q_{1, 2}$, переданной от первого тела второму, определяют из равенства

$$q_{1, 2} = E_{1, \text{рез}} = E_{1, \text{соб}} - E_{\text{погл}}, \quad (\text{XIII-20})$$

где $E_{1, \text{рез}}$ — плотность потока результирующего излучения первого тела;
 $E_{\text{погл}} = A_1 E_{2, \text{соб}}$ — плотность потока поглощенного излучения — часть собственного излучения второго тела, поглощенного первым.

Следовательно, для определения величины $q_{1, 2}$ надо уметь находить плотность потоков собственных излучений тел, участвующих в лучистом теплообмене, и их поглощательные способности.

Для нахождения плотностей потоков собственного излучения $E_{1, \text{соб}}$ и $E_{2, \text{соб}}$ используют законы теплового излучения; поглощательные способности тел определяют экспериментально.

§ 2. ЗАКОНЫ ТЕПЛОвого ИЗЛУЧЕНИЯ

Закон Планка

Впервые распределение пространственной плотности падающего излучения по частотам спектра для равновесного излучения, которым обладает абсолютно черное тело, было найдено Планком.

* Пропускательная способность для твердых тел принимается равной нулю, т. е. $D = 0$, тогда из (XIII-17), $R = 1 - A$.

Соответствующая формула Планка имеет вид [31]

$$u_{0,\lambda} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (\text{XIII-21})$$

где индекс «0» — относится к величинам абсолютно черного тела;

e — основание натуральных логарифмов;

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана.

Совмещая (XIII-14а) и (XIII-21), получим формулу для определения интенсивности монохроматического излучения данной частоты абсолютно черного тела

$$I_{0,\lambda} = \frac{cu_{0,\nu}}{4\pi} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}; \quad (\text{XIII-22})$$

совмещая (XIII-22) и (XIII-1), получим то же для данной длины волны λ .

$$I_{0,\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (\text{XIII-23})$$

Используя выражения (XIII-8) и (XIII-23), можно получить формулу для определения плотности полусферического монохроматического излучения для данной длины волны λ

$$E_{0,\lambda} = \pi I_{0,\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (\text{XIII-24})$$

или в более короткой записи

$$E_{0,\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}, \quad (\text{XIII-25})$$

где константы C_1 и C_2 равны:

$$C_1 = 2\pi hc^2 = 3,74 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/см}^2;$$

$$C_2 = \frac{hc}{k} = 1,44 \text{ см/град}.$$

Уравнение (XIII-25) составляет *содержание закона Планка*. На рис. XIII-7 зависимость (XIII-25) представлена графически [90]. Из рисунка видно, что максимум кривых $E_{0,\lambda} = f(\lambda)$ с увеличением температуры абсолютно черного тела смещается в сторону коротких волн.

При выводе своего закона Планк впервые сделал допущение о дискретном испускании энергии излучения квантами света, или фотонами, и таким образом заложил основы квантовой теории.

Длина волны λ_m , на которую приходится максимум при данной температуре T , равна

$$\lambda_m T = 2,9 \text{ мм}^2 \cdot \text{К}. \quad (\text{XIII-26})$$

Соотношение (XIII-26) составляет *содержание закона Вина*.

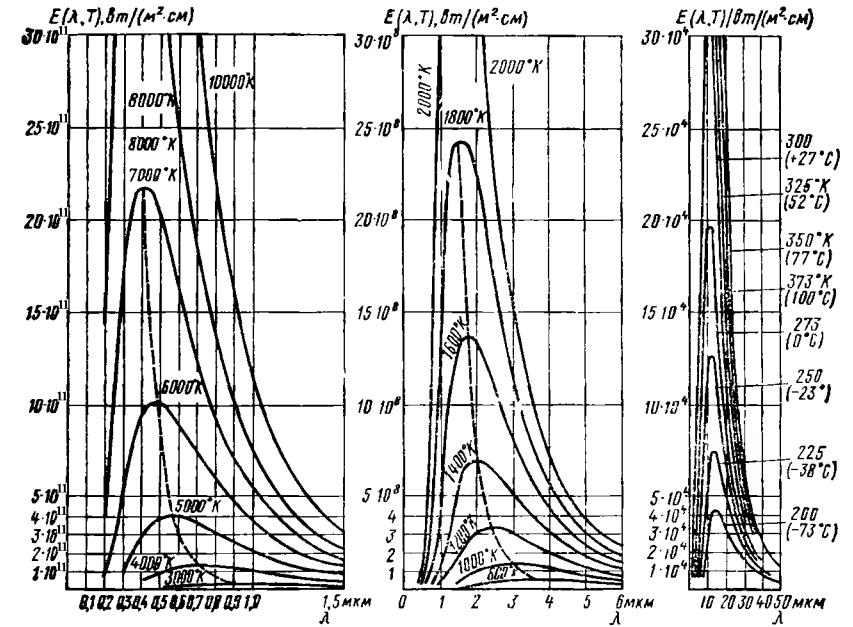


Рис. XIII-7. Зависимость $E_{0,\lambda} = f(\lambda, T)$ спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела $E_{0,\lambda}$ от длины волны λ и температуры T по закону Планка (XIII-25) [90]

Плотность потока собственного излучения абсолютно черного тела при заданной температуре T можно найти, интегрируя (XIII-25) в диапазоне длин волн от $\lambda = 0$ до $\lambda \rightarrow \infty$

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{0,\lambda} d\lambda. \quad (\text{XIII-27})$$

Интеграл (XIII-27) можно интерпретировать как площадь под соответствующей кривой $E_{0,\lambda} = f(T)$ на рис. XIII-7.

Закон Стефана — Больцмана

Плотность потока собственного излучения абсолютно черного тела при данной температуре может быть определена из выражения

$$E_0 = \sigma_0 T^4. \quad (\text{XIII-28})$$

Выражение (XIII-28) впервые было получено экспериментально Стефаном, а спустя два года — теоретически Больцманом, поэтому зависимость (XIII-28) называют законом Стефана — Больцмана. Постоянная в (XIII-28) была определена Больцманом теоретически; она равна $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Закон Стефана—Больцмана можно получить из закона Планка путем интегрирования (XIII-27), однако последний был получен в 1900 г., т. е. примерно на тридцать лет позднее первого.

Для большего удобства пользования выражение (XIII-28) обычно представляют в виде

$$E_0 = C_0 \left[\frac{T}{100} \right]^4, \quad (\text{XIII-29})$$

где постоянная $C_0 = \sigma_0 \cdot 10^8 = 5,67 \text{ вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$.

Закон Кирхгофа

Пусть два тела с одинаковой температурой находятся в термодинамическом равновесии и составляют изолированную систему. Тогда для каждого из тел собственное тепловое излучение равно поглощенному внешнему излучению. Другими словами: между телами происходит равновесное тепловое излучение. В этих условиях отношение плотности монохроматического потока излучения E_λ к соответствующей поглощательной способности A_λ не зависит от природы тела и равно плотности монохроматического потока излучения абсолютно черного тела $E_{0,\lambda}$

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = E_{0,\lambda}, \quad (\text{XIII-30})$$

а для интегрального излучения

$$\frac{E}{A} = E_0. \quad (\text{XIII-31})$$

Соотношение (XIII-31) составляет *содержание закона Кирхгофа*. Этот закон строго справедлив только для равновесного излучения.

Практический интерес представляют случаи неравновесного излучения, когда температуры тел (участков среды), участвующих в теплообмене, различны. Спектральная поглощательная способность тела — приемника энергии зависит не только от его температуры, но и от распределения энергии по длинам волн (частотам) тела — излучателя энергии. Это обстоятельство значительно усложняет расчет теплообмена излучением.

Для упрощения методик расчета теплообмена излучением используют понятие — *серое тело* (среду), спектральная поглощательная способность которого не зависит от длины волны (частоты) падающего излучения, называют *серым*.

Серое тело при данной температуре характеризуется непрерывным распределением энергии в спектре собственного излучения, подобным

распределению энергии в спектре абсолютно черного тела при той же температуре.

Для серых тел интегральная и монохроматическая поглощательные способности равны, т. е. $A \equiv A_\lambda$. Материалы, встречающиеся в инженерной практике (реальное тело), по своим радиационным свойствам близки к серым телам.

Реальные тела при данной температуре характеризуются собственным излучением, всегда меньшим для всех частот по сравнению с энергией излучения абсолютно черного тела.

Отношение интенсивностей собственного излучения реального тела в направлении $\vec{s}$ и абсолютно черного тела при одних и тех же длинах волн λ и температурах T называют *степенью черноты излучения* и обозначают

$$\epsilon_\lambda = \frac{I(\lambda, T, \vec{s})}{I_0(\lambda, T)}. \quad (\text{XIII-32})$$

Для серых тел величина ϵ_λ остается постоянной для различных длин волн λ и равной интегральной степени черноты ϵ

$$\epsilon = \frac{I(T)}{I_0(T)} = \frac{E(T)}{\sigma_0 T^4}. \quad (\text{XIII-33})$$

Закон Стефана—Больцмана (XIII-28 и XIII-29) для серого тела с учетом выражения (XIII-33) имеет вид

$$E = \epsilon \sigma_0 T^4 = \epsilon C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4. \quad (\text{XIII-34})$$

Закон Стефана—Больцмана в форме (XIII-34) может использоваться для практических расчетов. Зависимости $\epsilon = E/E_0 = f(T)$ для различных реальных тел определены экспериментально, а результаты приведены в литературе [47, 97].

§ 3. ТЕПЛОБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ, РАЗДЕЛЕННЫМИ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДОЙ

Рассмотрим теплообмен излучением между двумя параллельными пластинами (серыми телами) неограниченных размеров 1 и 2 (рис. XIII-8) с постоянными во времени температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), с поглощательными способностями A_1 и A_2 , разделенными прозрачной средой, т. е. такой, которая полностью пропускает любое падающее на нее излучение. Будем считать, что переноса теплоты теплопроводностью и конвекцией не происходит.

Выведем формулу для определения количества теплоты q_{12} , перенесенной от пластины 1 к пластине 2. Количество энергии излучения, испускаемое каждой пластиной, зависит только от процессов, происходящих в ее массе, но не зависит от того, куда происходит излучение. Например, собственное излучение пластины 1 в сторону пластины 2 зависит только от ее температуры T_1 и физических свойств, но не

зависит от температуры T_2 пластины 2. Точно так же излучение пластины 2 в сторону пластины 1 зависит только от ее температуры T_2 и физических свойств, но не зависит от температуры T_1 пластины 1. Энергия излучения от пластины 1 в количестве $E_{1, \text{соб}}$ передается к пластине 2, там часть ее в количестве $E_{1, \text{соб}} \cdot A_2$ поглощается, а другая часть в количестве $E_{1, \text{соб}} (1 - A_2)$ отражается и возвращается к пластине 1. Там вновь одна часть энергии поглощается, а другая отражается; дальнейшее протекание этого процесса изображено на рис. XIII-8.

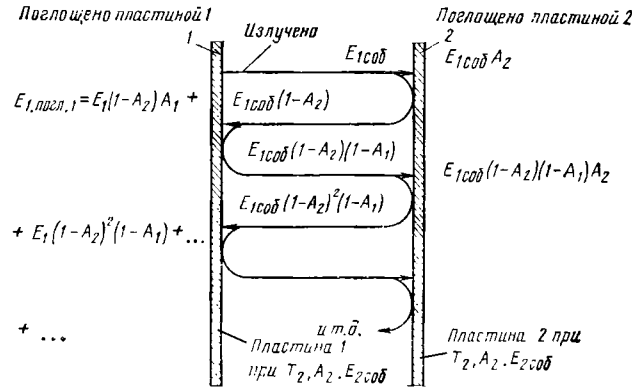


Рис. XIII-8. Схема теплообмена излучением между двумя параллельными пластинами, разделенными прозрачной средой; к выводу уравнения (XIII-44)

Величину q_{12} теплоты, переданной от пластины 1 пластине 2, можно представить в следующем виде:

$$q_{12} = E_{1, \text{соб}} - (E_{1, \text{погл}, 1} + E_{1, \text{погл}, 2}), \quad (\text{XIII-35})$$

где $E_{1, \text{соб}}$ — собственное излучение пластины 1;
 $E_{1, \text{погл}, 1}$ — часть излучения $E_{1, \text{соб}}$, поглощенная пластиной 1, после его отражения от пластины 2 (см. рис. XIII-8);
 $E_{1, \text{погл}, 2}$ — часть излучения $E_{2, \text{соб}}$, поглощенная пластиной 1. Величину $E_{1, \text{погл}, 1}$ можно определить из выражения

$$E_{1, \text{погл}, 1} = A_1 (1 - A_2) E_1 [1 + (1 - A_1)(1 - A_2) + (1 - A_1)^2 (1 - A_2)^2 + \dots]$$

или после преобразования*

$$E_{1, \text{погл}, 1} = A_1 (1 - A_2) E_1 \left[\frac{1}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)} \right]. \quad (\text{XIII-36})$$

* Сумма бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии равна

$$1 + (1 - A_1)(1 - A_2) + (1 - A_1)^2 (1 - A_2)^2 + \dots = \frac{1}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}.$$

На основании рассуждений, аналогичных предыдущим, величину $E_{1, \text{погл}, 2}$ можно представить в виде

$$E_{1, \text{погл}, 2} = \frac{A_1 E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}. \quad (\text{XIII-37})$$

Подставим в (XIII-35) значения $E_{1, \text{погл}, 1}$ и $E_{1, \text{погл}, 2}$ из (XIII-36) и (XIII-37). В результате получим

$$q_{12} = E_{1, \text{соб}} - \frac{A_1 (1 - A_2) E_1 + A_1 E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}. \quad (\text{XIII-38})$$

После простых преобразований (XIII-38) с учетом закона Кирхгофа (XIII-31) получим [30]

$$q_{12} = \frac{E_{0,1} - E_{0,2}}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (\text{XIII-39})$$

Но по закону Стефана—Больцмана (XIII-29)

$$E_{0,1} = C_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \text{ и } E_{0,2} = C_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4, \quad (\text{XIII-40})$$

тогда

$$q_{12} = A_n C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{XIII-41})$$

где

$$A_n = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} \quad (\text{XIII-42})$$

— приведенный коэффициент поглощения параллельных пластин. По закону Кирхгофа

$$\frac{E_1}{A_1} = E_0,$$

откуда

$$\frac{E_1}{E_0} = A_1 = \varepsilon_1.$$

Поэтому (XIII-42) и (XIII-41) можно представить в виде

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (\text{XIII-43})$$

и

$$q_{12} = \varepsilon_n C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{XIII-44})$$

где ε_n — приведенная степень черноты.

Применяя описанный выше метод, можно получить расчетную формулу для определения лучистого теплообмена между двумя сферами, меньшая из которых находится внутри большей (рис. XIII-9).

Эта формула имеет вид [63]

$$Q_{12} = \frac{F_1 C_0}{\frac{1}{A_1} + \varphi_{2 \rightarrow 1} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \varphi_{2 \rightarrow 1} \frac{F_2}{F_1} \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{XIII-45})$$

где $\varphi_{2 \rightarrow 1}$ — безразмерный угловой коэффициент, показывающий, какая часть эффективного излучения второй сферы попадает на первую (см. рис. XIII-9).

Если принять, что для поверхности второй сферы соблюдается закон Ламберта, то угловой коэффициент будет зависеть только от размеров сфер и их взаимного расположения. Можно доказать, что для рассматриваемого случая [63]

$$\varphi_{2 \rightarrow 1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (\text{XIII-46})$$

С учетом (XIII-46) формула (XIII-45) примет вид

$$Q_{12} = \varepsilon_n C_0 F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{XIII-47})$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (\text{XIII-48})$$

Установлено [61], что расчетные формулы (XIII-44) и (XIII-47) могут применяться для системы из двух тел любой формы, лишь бы меньшее из них было выпуклым.

Определение лучистого теплообмена для более сложных систем оказывается весьма сложной задачей и в большинстве случаев ее можно решить только приближенно. С такими задачами можно познакомиться в специальной литературе [73, 80, 111].

§ 4. ТЕПЛОБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

В предыдущем параграфе был рассмотрен теплообмен излучением между двумя пластинами, разделенными прозрачной средой. В инженерной практике часто приходится встречаться со средами, которые, в отличие от прозрачной, пропускают не все падающее на них излучение. Различают ослабляющие, поглощающие и рассеивающие среды.

Ослабляющей средой называют такую, в которой происходят процессы поглощения и рассеяния энергии излучения.

Поглощающей средой называют такую, в которой происходят процессы поглощения и испускания энергии излучения.

Рассеивающей средой называют такую, в которой происходит перераспределение энергии излучения по различным направлениям (в общем случае и по частотам), не сопровождающееся процессами энергетического превращения.

Газы, содержащие взвешенные твердые частицы или капельки жидкости, или без механических примесей, а также некоторые жидкие и твердые тела, в той или иной мере обладают свойствами ослаблять, поглощать и рассеивать энергию излучения, проходящую через них.

Однако исследование теплообмена излучением в различных реальных средах с учетом всех перечисленных оптических свойств оказывается очень сложной и громоздкой задачей, и поэтому она здесь рассматриваться не будет. В дальнейшем будет рассмотрен процесс теплообмена излучением в поглощающей газовой среде. Такой процесс имеет практическое значение, так как во многих реальных задачах приходится иметь дело с газами, а влиянием рассеяния энергии излучения можно пренебречь.

Механизм явлений испускания, поглощения и рассеяния в газах

Рассмотрим перечисленные механизмы на примере простейшего атома водорода, состоящего из протона и электрона [31]. При переходе атома или молекулы с одного энергетического уровня на другой происходит поглощение или испускание кванта (фотона). При поглощении кванта атом возбуждается. Для того чтобы атом испустил квант, он должен быть предварительно возбужден; если атом испускает квант, он теряет энергию возбуждения.

Испускание или поглощение энергии теплового излучения связано с испусканием или поглощением квантов.

Протон и электрон в связанном состоянии образуют атом водорода. Основное состояние атома водорода характеризуется энергией, равной по абсолютной величине потенциалу ионизации. Энергию основного состояния обычно измеряют в электрон-вольтах и считают отрицательной, для атома водорода она равна 13,5 эв. *Один электрон-вольт — это энергия, которую приобретает электрон при прохождении разности потенциалов в один вольт* ($1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$).

В связанном состоянии атом может находиться только на определенных дискретных энергетических уровнях. Энергия атома принимается равной нулю, когда электрон находится на границе между связанным и свободным состоянием. Электрон считается свободным, когда при поглощении очередного кванта атом распадается на положительно заряженный ион и электрон.

Процесс распада атомов на ионы и электроны называют ионизацией газа. Если атом находится на таком энергетическом уровне, на котором энергия очередного поглощенного

кванта превышает энергию связи протона и электрона, то избыток энергии кванта превратится в кинетическую энергию свободного электрона.

В связанном состоянии электрон может поглощать или испускать энергию только дискретными порциями — квантами; в этом случае спектр будет состоять из дискретных линий некоторой ширины $\Delta\nu$. В свободном состоянии электрон может обладать любой кинетической энергией и его энергетический спектр непрерывен. Переход от свободного состояния электрона к связанному происходит при испускании им квантов. Процесс захвата свободных электронов ионами, который приводит к восстановлению атомов, называется *рекомбинацией*. Этот процесс имеет непрерывный энергетический спектр.

Процессы ионизации и рекомбинации протекают при очень высоких температурах (см. гл. XI, § 7, рис. XI-25). В ионизированном газе могут наблюдаться следующие процессы:

свободный электрон может поглотить квант энергии, после этого кинетическая энергия электрона увеличится;

свободный электрон может испустить квант энергии, если после этого он сохранит некоторый запас кинетической энергии, то останется свободным, так как электрическое поле пока не сможет захватить его.

Процессы испускания квантов свободными электронами называют *тормозными*, так как потеря некоторого количества кинетической энергии воспринимается как торможение в электрическом поле иона. Тормозные процессы могут происходить как в поле иона, так и в поле нейтрального атома, но в последнем случае необходимо тесное сближение свободного электрона и атома, поэтому эти случаи менее вероятны.

Процессы поглощения и испускания квантов свободными электронами имеют непрерывный спектр.

Газы могут не только испускать и поглощать кванты, но и рассеивать их; как правило, рассеиваются кванты свободными электронами. При обозримых температурах энергия квантов невелика, она значительно меньше энергии электрона; такие кванты рассеиваются без изменения энергии, поэтому в этих условиях *рассеиванием* называют процесс изменения направления распространения квантов (фотонов).

Рассеивание оказывает существенное влияние на процессы переноса энергии излучения только в полностью ионизованных и очень сильно разреженных газах; в обычных условиях влиянием рассеивания по сравнению с поглощением можно пренебречь.

Следует отметить, что рассеивание энергии излучения оказывает существенное влияние на ее перенос в дисперсных средах, например, в запыленных газах, туманах, высокопористых изоляционных материалах и др. Процессы теплообмена излучением в таких средах в настоящей книге не рассмотрены, с ними можно познакомиться в специальной литературе [45, 90].

В более сложных атомных системах (молекулах), по сравнению с атомами водорода, при поглощении или испускании кванта сложной молекулой газа ее энергетический уровень изменяется не только в ре-

зультате изменения электронного состояния, но и колебательного и вращательного состояний. Движение двух- или многоатомной молекулы в пространстве можно разложить на поступательное и вращательное, кроме того, возможно колебательное движение атомов вдоль осей, их соединяющих; от интенсивности этих движений и зависит вращательное и колебательное состояние.

Уравнение переноса энергии излучения в плоском слое поглощающей среды

Рассмотрим процесс переноса излучения между двумя параллельными пластинами неограниченных размеров 1 и 2 (рис. XIII-10), разделенными поглощающей средой в одномерном представлении [111]. Спектральная интенсивность излучения $I_\lambda(x, \theta)$ в каждой точке среды складывается из двух составляющих $I_\lambda^+(x, \theta)$ и $I_\lambda^-(x, \theta)$: первая составляющая направлена в сторону положительных значений x , вторая — в сторону отрицательных.

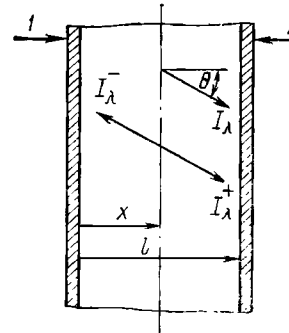


Рис. XIII-10. К выводу уравнения (XIII-56) переноса энергии излучения в плоском слое толщиной l поглощающей среды

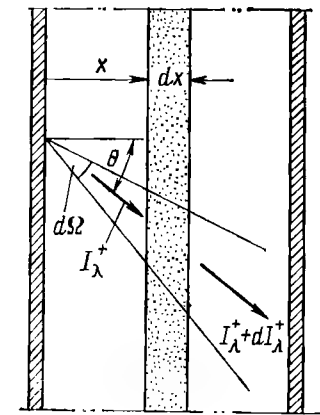


Рис. XIII-11. К выводу уравнения (XIII-56) переноса энергии излучения

Составим баланс энергии излучения для элементарного плоского слоя dx (рис. XIII-11). Спектральная интенсивность излучения к правой пластине I_λ^+ , проходя через слой, изменяется на dI_λ^+ . Величина I_λ^+ возрастает за счет собственного излучения слоя и уменьшается в результате поглощения в слое (влиянием рассеивания пренебрегаем).

Приведем некоторые соотношения, которые понадобятся для составления баланса. Спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела $I_{0,\lambda}$ не зависит от направления (диффузное излучение), кроме того, это тело поглощает всю падающую на него энергию излучения. Поэтому на основании выражения (XIII-8) для монохроматического полусферического излучения $E_{0,\lambda}$ можно написать

$$E_{0,\lambda} = \pi I_{0,\lambda}, \quad (\text{XIII-49})$$

а для интегрального излучения

$$E_0 = \pi I_0. \quad (\text{XIII-50})$$

Кроме того, из (XIII-49) следует

$$I_{0,\lambda} = \frac{E_{0,\lambda}}{\pi}. \quad (\text{XIII-51})$$

Теперь продолжим составление баланса для энергии излучения.

Локальное значение монохроматического излучения единицы объема поглощающей среды (нечерной) в единицу времени в пределах телесного угла $\Omega = 4\pi$ получим, используя (XIII-51)

$$\kappa_\lambda(x) \frac{E_{0,\lambda}}{\pi} 4\pi = 4\kappa_\lambda(x) E_{0,\lambda}, \quad (\text{XIII-52})$$

где $\kappa_\lambda(x)$ — спектральный коэффициент поглощения излучения.

Спектральную интенсивность собственного излучения элементарного объема среды $dx \times 1 \times 1 = dx$ в направлении I_λ^+ (рис. XIII-11) можно получить путем умножения (XIII-52) на величину названного объема и деления на полный телесный угол $\Omega = 4\pi$

$$\frac{\kappa_\lambda(x) E_{0,\lambda}(x) dx}{\pi \cos \theta}. \quad (\text{XIII-53})$$

Величина $E_{0,\lambda}$ зависит только от температуры, но $T = f(x)$, поэтому принимаем $E_{0,\lambda} = f_1(x)$.

Спектральную интенсивность излучения I_λ^+ после прохождения слоя dx поглощающей среды (в направлении I_λ^+ , рис. XIII-11) можно представить в форме

$$\frac{\kappa_\lambda(x) I_\lambda^+ dx}{\cos \theta}. \quad (\text{XIII-54})$$

Результирующее приращение спектральной интенсивности излучения на основании (XIII-53 и XIII-54) имеет вид

$$dI_\lambda^+ = + \frac{\kappa_\lambda(x) E_{0,\lambda}(x) dx}{\pi \cos \theta} - \frac{\kappa_\lambda(x) I_\lambda^+ dx}{\cos \theta}. \quad (\text{XIII-55})$$

Используя (XIII-55), можно получить дифференциальное уравнение переноса энергии излучения относительно $I_\lambda^+(x, \theta)$

$$\cos \theta \frac{dI_\lambda^+}{dx} = \frac{\kappa_\lambda(x)}{\pi} E_{0,\lambda}(x) - \kappa_\lambda(x) I_\lambda^+. \quad (\text{XIII-56})$$

Вышеописанным способом можно получить идентичное уравнение относительно $I_\lambda^-(x, \theta)$ в виде

$$\cos \theta \frac{dI_\lambda^-}{dx} = - \frac{\kappa_\lambda(x)}{\pi} E_{0,\lambda}(x) - \kappa_\lambda(x) I_\lambda^-. \quad (\text{XIII-57})$$

Путем определенных преобразований (XIII-56 и XIII-57) с использованием некоторых дополнительных зависимостей получена [90] формула потока лучевого переноса теплоты $q_{\text{луч},x}$ для всего спектра теплового излучения среды

$$q_{\text{луч},x} = - \frac{4\sigma_0}{3\bar{\kappa}(x)} \frac{\partial T^4}{\partial x}, \quad (\text{XIII-58})$$

где $\bar{\kappa}_\lambda$ — средний коэффициент поглощения.

Отметим важную особенность теплообмена между стенкой и средой на границе слоя. Установлено, что на указанной границе существует скачок температуры, который можно определить из уравнения

$$T^4 - T_{\text{ст}}^4 = \frac{q_{\text{луч}} \left(\frac{1}{A_{\text{ст}}} - \frac{1}{2} \right)}{\sigma_0}. \quad (\text{XIII-59})$$

Теплообмен излучением между параллельными пластинами, разделенными поглощающей средой

Рассмотрим теплообмен излучением между двумя параллельными пластинами (серыми телами) неограниченных размеров 1 и 2 с постоянными во времени температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$) и поглощающими способностями A_1 и A_2 , разделенными слоем неподвижной поглощающей серой ($\kappa_\lambda = \kappa$) среды толщиной l . Будем считать, что переноса теплоты теплопроводностью и конвекцией не происходит. Выведем формулу для определения количества теплоты q_{12} , переданной от пластины 1 к пластине 2 [90].

Из формулы (XIII-58) при условии $\kappa = \text{const}$ найдем распределение температуры в слое поглощающей среды

$$T^4(x) = T'^4 - q_{\text{луч}} \frac{3}{4} \frac{\kappa}{\sigma_0} x, \quad (\text{XIII-60})$$

где T' — температура среды на границе слоя у пластины 1.

Из (XIII-60) для $x = l$ получим

$$T'^4 - T''^4 = q_{\text{луч}} \frac{3}{4} \frac{\kappa l}{\sigma_0}, \quad (\text{XIII-61})$$

где T'' — температура среды на границе слоя у пластины 2.

Скачки температуры у пластины первой T_1 , A_1 и второй T_2 , A_2 на основании (XIII-59) соответственно будут равны

$$T_1^4 - T'^4 = q_{\text{луч}} \frac{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2}}{\sigma_0} \quad (\text{XIII-62})$$

и

$$T''^4 - T_2^4 = q_{\text{луч}} \frac{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2}}{\sigma_0}. \quad (\text{XIII-63})$$

Сложим почленно уравнения (XIII-61, XIII-62 и XIII-63). В результате получим формулу для определения количества теплоты q_{12} , переданной от пластины 1 к пластине 2

$$q_{луч} = q_{12} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 + \frac{3}{4} \kappa l} \quad (\text{XIII-64})$$

Формулу (XIII-64) можно представить в другом виде, с учетом (XIII-29) получим

$$q_{12} = \frac{C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 + \frac{3}{4} \kappa l} \quad (\text{XIII-65})$$

В частном случае для прозрачной среды ($\kappa l = 0$) выражение (XIII-65) примет вид формулы (XIII-41).

§ 5. ТЕПЛОБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В РЕАЛЬНЫХ ГАЗАХ И ПАРАХ

Вначале рассмотрим слой некоторой поглощающей среды, в которой I_λ интенсивность излучения (в данном направлении) уменьшается только вследствие поглощения, а собственное излучение слоя оказывается много меньше внешнего излучения, ослабляемого средой, и им можно пренебречь. Для этих условий уравнение переноса энергии излучения (XIII-56) примет вид

$$\frac{dI_\lambda}{dx} = -\kappa_\lambda I_\lambda \quad (\text{XIII-66})$$

Полученное уравнение (XIII-66) составляет *содержание закона Бугера*. Воспользуемся этим законом для определения поглощательной способности слоя

$$A_\lambda = \frac{I_\lambda^0 - I_\lambda}{I_\lambda^0} = 1 - \frac{I_\lambda}{I_\lambda^0}, \quad (\text{XIII-67})$$

где I_λ^0 и I_λ — интенсивности излучений соответственно на входе и выходе из слоя.

Представим (XIII-66) в виде

$$\frac{dI_\lambda}{I_\lambda^0} = -\kappa_\lambda dx \quad (\text{XIII-68})$$

Интегрируя (XIII-68), для однородной среды с постоянным по длине луча l коэффициентом поглощения, получим

$$\ln I_\lambda = -\kappa_\lambda \int_0^l dx = -\kappa_\lambda l + C \quad (\text{XIII-69})$$

Определим постоянную интегрирования при $l = 0$ $C = \ln I_\lambda^0$ и подставим ее значение в (XIII-69)

$$\frac{I_\lambda}{I_\lambda^0} = e^{-\kappa_\lambda l} \quad (\text{XIII-70})$$

Совмещая (XIII-67) и (XIII-70), получим формулу для поглощательной способности слоя толщиной l

$$A_\lambda = 1 - e^{-\kappa_\lambda l} \quad (\text{XIII-71})$$

Если слой рассматриваемой среды находится в состоянии радиационного равновесия ($\frac{dq_{луч}}{dx} = 0$), то на основании закона Кирхгофа получим

$$\epsilon_\lambda = A_\lambda = 1 - e^{-\kappa_\lambda l}, \quad (\text{XIII-72})$$

где ϵ_λ — спектральная степень черноты слоя в том же направлении, что и спектральная поглощательная способность.

Теперь рассмотрим реальные газы и пары. Ранее отмечалось, что они поглощают и испускают энергию излучения только в определенных диапазонах длин волн. Такие диапазоны называют *полосами поглощения и испускания*, а спектр излучения — *полосчатым* (рис. XIII-12). Вне этих полос газы и пары остаются прозрачными для теплового излучения.

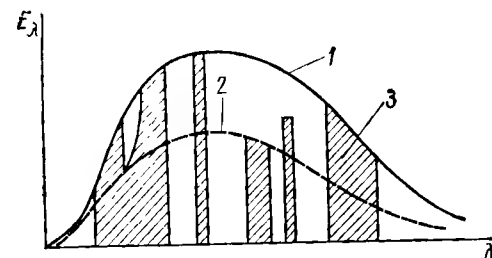


Рис. XIII-12. Спектры излучения тела: 1 — абсолютно черного, 2 — серого, 3 — газообразного

Заметно поглощают и испускают энергию излучения только трехатомные газы; одноатомные и двухатомные газы практически прозрачны для теплового излучения всех длин волн и сами энергию не испускают.

Наибольший практический интерес представляют трехатомные газы: газ CO_2 и водяной пар H_2O . В табл. XIII-1 приведены диапазоны длин волн для трех полос спектра, наиболее важных в энергетическом отношении углекислого газа CO_2 и водяного пара H_2O [45].

Таблица XIII-1

№ полосы	Ширина полосы излучения λ , мк					
	λ_1	λ_2	$\Delta\lambda$	λ_1	λ_2	$\Delta\lambda$
	CO_2			H_2O		
1	2,65	2,80	0,15	2,30	3,40	1,10
2	4,15	4,45	0,30	4,40	8,50	4,10
3	13,00	17,00	4,00	12,00	30,00	18,00

Ширина полос излучения $\Delta\lambda$ (табл. XIII-1) зависит от температуры при прочих равных условиях. На рис. XIII-13 представлена зависимость $A_\lambda = f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ для CO_2 при значении произведения плотности газа ρ на толщину слоя l , равном $\rho l = 2,4 \text{ кг/см}^2$. На рисунке изображены четыре полосы излучения с указанием средней длины волны для каждой. Из рисунка видно влияние температуры газа на поглощательную способность A_λ [111]. С увеличением температуры увеличивается ширина полос поглощения, а для данной длины волны $\frac{1}{\lambda}$ возрастает величина A_λ .

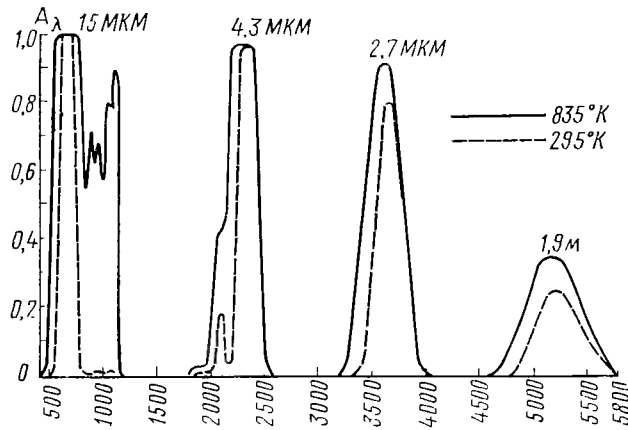


Рис. XIII-13. Зависимость $A_\lambda = f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ поглощательной способности A_λ от длины волны $\frac{1}{\lambda}$ для углекислоты CO_2 при различных температурах [111]

Плотность потока излучения газа в целом складывается из плотностей потоков излучения всех полос его спектра.

Опыты показали, что для газов и паров плотность потока собственного излучения E_r оказывается пропорциональной примерно третьей степени их температуры, а не четвертой, как для твердых тел. Газы и пар не подчиняются закону Стефана—Больцмана (XIII-34). Однако для удобства, особенно при расчетах теплообмена между твердыми телами и газом, сохраняют четвертую степень и формулу для плотности собственного излучения слоя газа E_r с температурой T_r и конкретной величиной ρl (где ρ — давление газа, l — толщина слоя) представляют в форме

$$E_r = \varepsilon_r C_0 \left(\frac{T_r}{100} \right)^4, \quad (\text{XIII-73})$$

где ε_r — интегральная степень черноты газа.

Для того чтобы воспользоваться формулой (XIII-73), необходимо знать величину ε_r . Рассмотрим способ ее определения.

Допустим, что ослабление интенсивности излучения, проходящего через слой газа, прямо пропорционально числу молекул, встречающихся на пути луча*, в свою очередь это число молекул зависит от их концентрации в единице объема слоя или, при заданной температуре, от давления газа p (плотности ρ), тогда (XIII-71) примет вид

$$A_\lambda = \varepsilon_\lambda = 1 - e^{-b_\lambda \rho l}, \quad (\text{XIII-74})$$

где b_λ — коэффициент пропорциональности, зависящий от температуры и природы газа.

Итак, поглощательная способность слоя конкретного газа для данной длины волны в полосе поглощения A_λ и степень черноты ε_λ будут функциями следующих величин:

$$A_\lambda = \varepsilon_\lambda = f(T_r, \rho l). \quad (\text{XIII-75})$$

Интегральную степень черноты газа для всех полос поглощения спектра газа для конкретных значений температуры T_r , давления p и толщины слоя l можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_r = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda I_{\lambda l} d\lambda}{\sigma_0 T^4}, \quad (\text{XIII-76})$$

где $I_{\lambda l}$ — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела, определяемая по закону Планка.

Если функция (XIII-75) известна, то из (XIII-76) можно найти ε_r .

Для реальных газов зависимость

$$\varepsilon_r = f(T_r, \rho l) \quad (\text{XIII-77})$$

находят экспериментально.

В (XIII-77) длина луча l считается одинаковой во всех направлениях, так как обследуется излучение в полусферу от излучателя, расположенного в центре ее основания. В реальных задачах форма излучающего объема газа может быть разнообразной. Поэтому вводят понятие эффективной длины луча $l_{\text{эф}}$. Приближенное значение $l_{\text{эф}}$ можно определить из выражения

$$l_{\text{эф}} = 0,9 \frac{4V}{F}, \quad (\text{XIII-78})$$

где V — объем, занимаемый излучающим газом;

F — площадь внутренней поверхности оболочки, в которой содержится газ.

На рис. XIII-14 представлена экспериментальная зависимость степени черноты излучения $\varepsilon_{\text{CO}_2}$ различных изотермических слоев углекислоты CO_2 от температуры T и величины $p_{\text{CO}_2} l$ (где p_{CO_2} — парциальное давление углекислоты в данной смеси газов) для давления смеси $p_{\text{см}} = 1 \text{ атм}$ (абсолютное давление $1 \text{ кг/см}^2 = 1 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 = 0,98 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$).

* Это допущение удовлетворительно подтверждается только для сред с малой концентрацией поглощающего вещества.

С увеличением давления $p_{см}$ смеси газов — полосы поглощения для CO_2 расширяются*, при этом интегральная степень черноты естественно возрастает. Для учета этого влияния величину ϵ_{CO_2} , полученную из графика рис. XIII-14, умножают на поправочный коэффициент, который находят по графику, изображенному на рис. XIII-15.

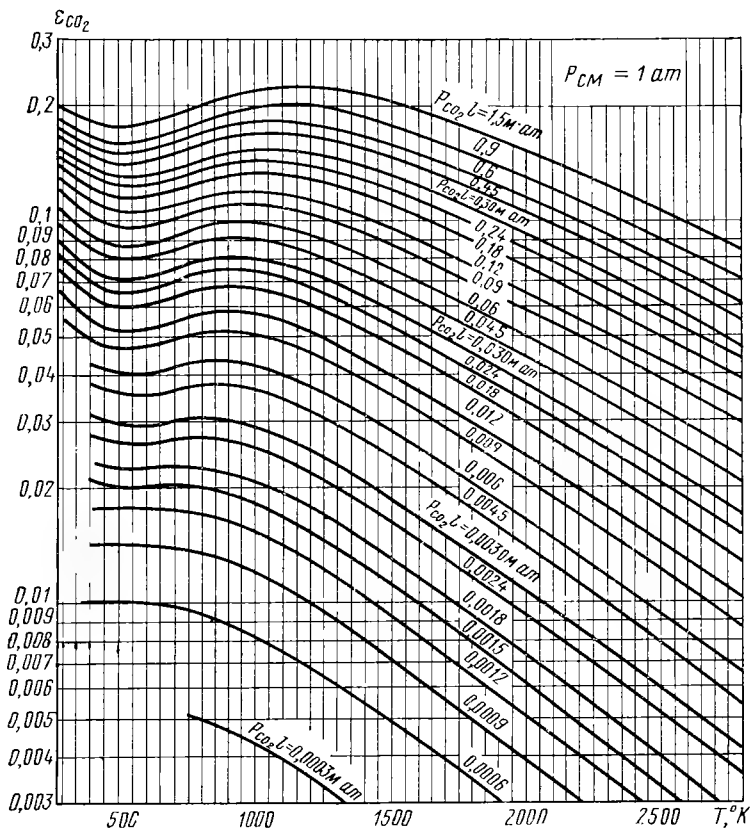


Рис. XIII-14. График определения степени черноты ϵ_{CO_2} углекислоты CO_2

На рис. XIII-16 представлена экспериментальная зависимость степени черноты водяного пара ϵ_{H_2O} от температуры T и величины $p_{H_2O} l$ для давления смеси $p_{см} = 1 \text{ атм}$, причем экспериментальные данные искусственно приведены к некоторому идеализированному случаю, с парциальным давлением пара $p_{H_2O} \rightarrow 0$. Только таким образом удалось обобщить результаты измерений многих исследователей [60] и представить их в форме единых кривых на рис. XIII-16. Для того чтобы получить степень черноты смеси газа, в которую входит

* Ранее уже отмечалось расширение полос спектра с увеличением температуры (рис. XIII-13).

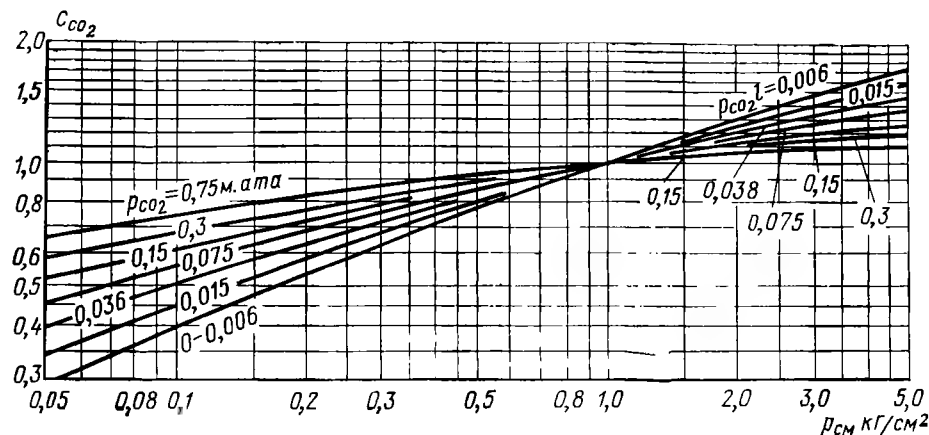


Рис. XIII-15. График определения поправочного коэффициента C_{CO_2} для вычисления степени черноты углекислоты ϵ_{CO_2} при заданном давлении смеси по величине ϵ_{CO_2} при $p_{см} = 0.98 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$

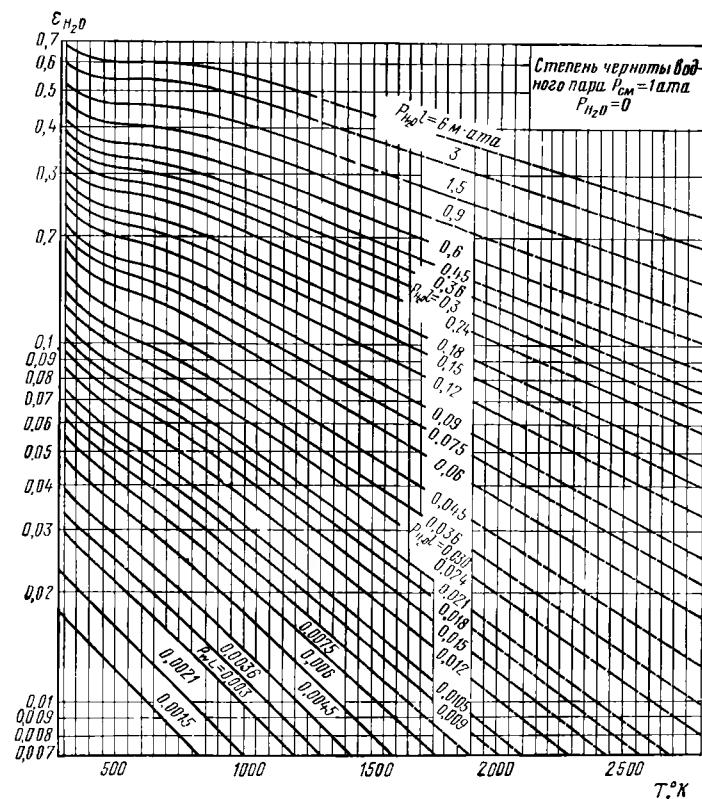


Рис. XIII-16. График определения степени черноты ϵ_{H_2O} водяного пара H_2O

водяной пар с конкретным парциальным давлением $p_{H_2O} > 0$, нужно величину ε_{H_2O} , найденную из графика рис. XIII-16, умножить на поправочный коэффициент C_{H_2O} . Значение C_{H_2O} находят по графику, представленному на рис. XIII-17,

$$C_{H_2O} = f \left[\frac{1}{2} (p_{H_2O} + p_{см}) \right].$$

Степень черноты смеси, в которую входят одновременно газ CO_2 и водяной пар H_2O , может быть определена из уравнения

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{CO_2} + \varepsilon_{H_2O} - \Delta\varepsilon_r, \quad (XIII-79)$$

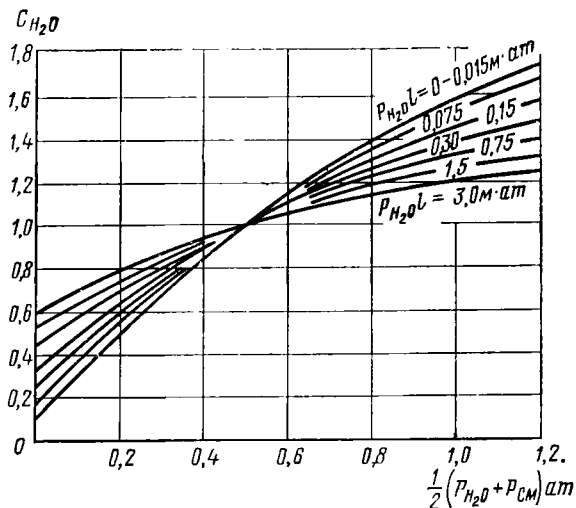


Рис. XIII-17. График определения поправочного коэффициента C_{H_2O} для вычисления степени черноты водяного пара H_2O при значениях $p_{H_2O} \neq 0$ и $p_{см} = 0,98 \cdot 10^5$ н/м²

т. е. она оказывается меньше суммы значений степени черноты углекислоты и водяного пара. Такое положение объясняется тем, что происходит частичное взаимное поглощение энергии излучения компонентами смеси CO_2 и H_2O . Величину $\Delta\varepsilon_r$ можно определить по графикам, приведенным на рис. XIII-18.

Рассмотрим теплообмен излучением между газом и поверхностью стенки (твердое тело) при упрощающем допущении — изотермичности газа [90]. Пусть некоторый объем газа имеет температуру T_1 , среднюю степень черноты $\varepsilon_1(T_1)$, поглощательную способность A_1 ; газ заключен в оболочку, площадь внутренней поверхности которой равна F , температура поверхности T_2 , степень черноты $\varepsilon_2(T_2)$, поглощательная способность $A_2(T_2)$.

Определим Q_{12} количество теплоты, переданной от газа к стенке

$$Q_{12} = Q_{рез} = Q_{1,эф} - Q_{2,эф}. \quad (XIII-80)$$

Определим $Q_{1,эф}$ и $Q_{2,эф}$. Совмещая (XIII-18) и (XIII-19) и принимая $Q = EF$, получим

$$Q_{1,эф} = Q_{1,соб} + Q_{отр} = Q_{1,соб} + Q_{2,соб}(1 - A_1). \quad (XIII-81)$$

Из (XIII-20) следует

$$Q_{рез} = Q_{1,соб} - A_1 Q_{2,соб},$$

откуда

$$Q_{2,соб} = \frac{Q_{1,соб}}{A_1} - \frac{Q_{рез}}{A_1};$$

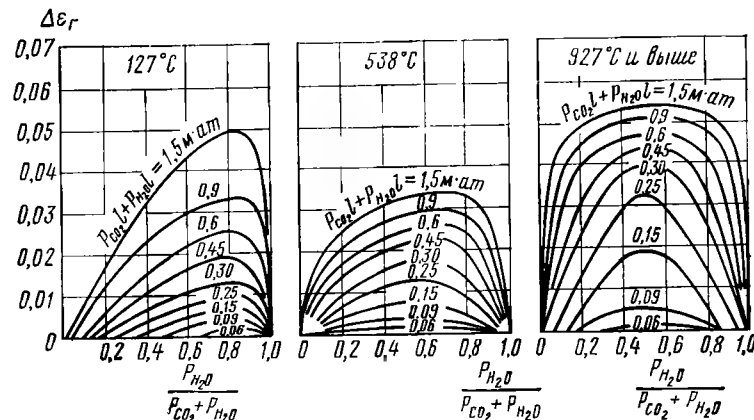


Рис. XIII-18. График определения поправки $\Delta\varepsilon_r$ для вычисления степени черноты газа по уравнению (XIII-79)

подставим последнее выражение в (XIII-81) и, учитывая, что $Q_{1,соб} = F\varepsilon_1\sigma_0 T_1^4$, получим для газа

$$Q_{1,эф} = F \frac{\varepsilon_1(T_1)}{A_1(T_2)} \sigma_0 T_1^4 - \left[\frac{1}{A_1(T_2)} - 1 \right] Q_{рез}; \quad (XIII-82)$$

аналогично для стенки

$$Q_{2,эф} = F \frac{\varepsilon_2(T_2)}{A_2(T_1)} \sigma_0 T_2^4 - \left[\frac{1}{A_2(T_1)} - 1 \right] Q_{рез}. \quad (XIII-83)$$

Совмещая (XIII-80, XIII-82 и XIII-83), найдем

$$Q_{12} = F \frac{\frac{\varepsilon_1(T_1)}{A_1(T_2)} \sigma_0 T_1^4 - \frac{\varepsilon_2(T_2)}{A_2(T_1)} \sigma_0 T_2^4}{\frac{1}{A_1(T_2)} + \frac{1}{A_2(T_1)} - 1}. \quad (XIII-84)$$

Допуская $\varepsilon_1(T_1) \approx A_1(T_2)$ и $\varepsilon_2(T_2) \approx A_2(T_1)$, можно преобразовать (XIII-84) к виду

$$Q_{12} = F A_{12} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4), \quad (\text{XIII-85})$$

где $A_{12} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}$ — приведенная поглощательная способность газа и стенки.

С инженерными методами расчета теплообмена излучением между газом и стенкой (Q_{12}) можно познакомиться в специальной литературе [60].

ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

§ 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Теплообменными аппаратами называют устройства, предназначенные для передачи теплоты от более нагретого теплоносителя к менее нагретому. Они широко применяются в различных областях техники. Для расчета теплообменных аппаратов используются сведения, приведенные в предыдущих главах.

По способу передачи теплоты различают контактные и поверхностные теплообменные аппараты. В контактных — теплота передается в результате непосредственного контакта (смещения) двух теплоносителей. Поверхностные теплообменные аппараты разделяют на *рекуперативные* и *регенеративные*. В первых теплота передается от одного теплоносителя к другому через разделяющую их твердую стенку; во вторых — следующим образом: стенка, находящаяся попеременно в контакте то с горячим, то с холодным теплоносителем, передает теплоту от первого ко второму.

Наибольшее распространение получили поверхностные рекуперативные теплообменные аппараты (рекуператоры), и поэтому в дальнейшем рассматривается именно этот тип теплообменника. В рекуператорах в качестве греющего и нагреваемого теплоносителя могут использоваться газы, пары и капельные жидкости.

§ 2. СХЕМА ТЕПЛОВОГО РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА

На рис. XIV-1, а изображена простейшая схема теплообменного аппарата. Если нагреваемая жидкость 1 и греющая жидкость 2 движутся в параллельных каналах в одном направлении, то такую схему движения называют *прямотоком*, если в противоположных — *противотоком*.

По всей длине теплообменника происходит передача теплоты от греющей жидкости к нагреваемой, в результате изменяются температуры обеих жидкостей по длине каналов. Типичный график изменения температур жидкостей изображен на рис. XIV-1, б.

При проектировании теплообменного аппарата (конструкторский* расчет) должны быть известны расходы нагреваемой 1 и греющей 2

* В отличие от конструкторского может проводиться *поверочный* расчет готовых или стандартных теплообменных аппаратов для установления возможности применять их в конкретных условиях.

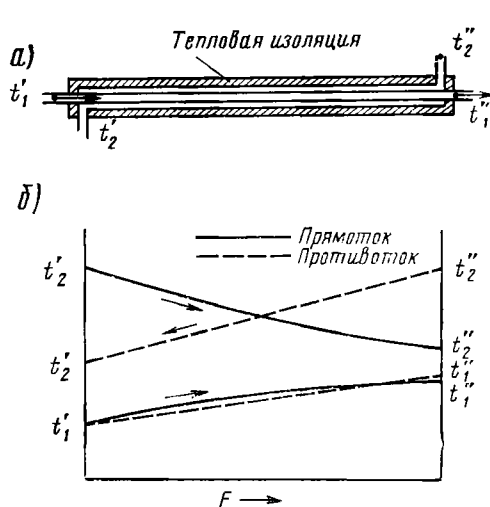


Рис. XIV-1. Схема однетрубного теплообменного аппарата (а); распределение температуры по длине трубы (б)

жидкостей, их температуры на входе t'_1 , t'_2 и выходе t''_1 , t''_2 и теплоемкости, искомая величина — поверхность нагрева.

Допустим, что массовые расходы нагреваемой и греющей жидкости G_1 , G_2 , их теплоемкости c_{p1} , c_{p2} , коэффициент теплопередачи k (I-12) сохраняются постоянными, а процесс передачи теплоты является стационарным. В этих условиях для определения поверхности нагрева F теплообменного аппарата можно использовать уравнение теплового баланса

$$Q = W_1(t'_1 - t''_1) = W_2(t'_2 - t''_2) \quad (\text{XIV-1})$$

и уравнение теплопередачи

$$Q = kF\Delta t_{\text{ср}}, \quad (\text{XIV-2})$$

где $W_1 = G_1 c_{p1}$, $W_2 = G_2 c_{p2}$ — водяные эквиваленты* нагреваемой 1 и греющей 2 жидкостей;

Q — количество теплоты, переданное от греющей жидкости 2 к нагреваемой 1;

$\Delta t_{\text{ср}}$ — средняя разность температур греющей и нагреваемой жидкости.

На основании несложных математических операций можно получить значение средней разности температур $\Delta t_{\text{ср}}$ в виде [61]

$$\Delta t_{\text{ср}} = \frac{\Delta t_{\text{б}} - \Delta t_{\text{м}}}{\ln \frac{\Delta t_{\text{б}}}{\Delta t_{\text{м}}}}, \quad (\text{XIV-3})$$

где $\Delta t_{\text{б}}$ и $\Delta t_{\text{м}}$ — больший и меньший температурные напоры между рабочими жидкостями вне зависимости от схемы движения жидкости (прямоток или противоток). Например, для однетрубного теплообменника (рис. XIV-1):

в случае прямотока

$$\Delta t_{\text{б}} = t'_2 - t'_1, \quad \Delta t_{\text{м}} = t''_2 - t''_1;$$

в случае противотока

$$\Delta t_{\text{б}} = t''_2 - t''_1, \quad \Delta t_{\text{м}} = t'_2 - t'_1.$$

* Водяным эквивалентом называют такой расход воды, который переносит столько же теплоты, сколько один килограмм действительного теплоносителя в час.

Величину $\Delta t_{\text{ср}}$ называют средним логарифмическим температурным напором.

Если величины $\Delta t_{\text{б}}$ и $\Delta t_{\text{м}}$ незначительно отличаются друг от друга, а их отношение [51] $\Delta t_{\text{б}}/\Delta t_{\text{м}} \leq 1,7$, то средний температурный напор можно приближенно определить из выражения

$$\Delta t_{\text{ср}} \approx \frac{\Delta t_{\text{б}} - \Delta t_{\text{м}}}{2}. \quad (\text{XIV-4})$$

Формулы (XIV-3) и (XIV-4) справедливы для прямотока и противотока в простейшем теплообменнике, состоящем из одной трубы* с параллельным током жидкостей (рис. XIV-1).

Для сложных теплообменников, где число труб больше одной, а жидкости текут непараллельно, средний температурный напор определяют по следующей формуле:

$$\Delta t_{\text{ср}} = \Delta t_{\text{ср-прот}} \psi, \quad (\text{XIV-5})$$

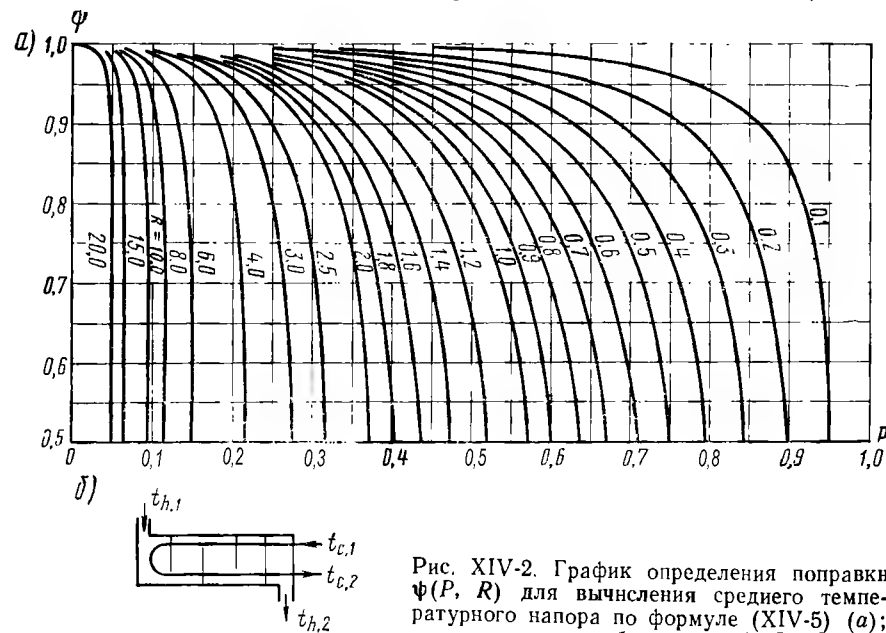


Рис. XIV-2. График определения поправки $\psi(P, R)$ для вычисления среднего температурного напора по формуле (XIV-5) (а); схема теплообменника (б) [107]

где $\Delta t_{\text{ср-прот}}$ — средний логарифмический температурный напор определяют как для теплообменника с одной трубой и противотоком по формуле (XIV-3);

ψ — поправочный коэффициент, являющийся функцией температур на входе в теплообменник и выходе из него и взаимной ориентации направлений потоков жидкостей.

* Теплота передается через стенки одной трубы.

Наиболее эффективным является теплообменник из одной трубы с противотоком, поэтому коэффициент ψ для него равен единице, а для всех других — меньше. Для теплообменника со сложной компоновкой поверхности нагрева коэффициент ψ определяют экспериментально. На рис. XIV-2 и XIV-3 представлены графики $\psi = f(P, R)$ для двух схем теплообменников [107]. Формулы для определения P и R имеют вид:

а) для теплообменника, схема которого изображена на рис. XIV-2,б

$$P = \frac{t_{c,2} - t_{c,1}}{t_{h,1} - t_{c,1}}; \quad R = \frac{t_{h,1} - t_{h,2}}{t_{c,2} - t_{c,1}}; \quad (\text{XIV-6a, б})$$

б) для теплообменника, схема которого изображена на рис. XIV-3,б.

$$P = \frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'}; \quad R = \frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'}. \quad (\text{XIV-7a, б})$$

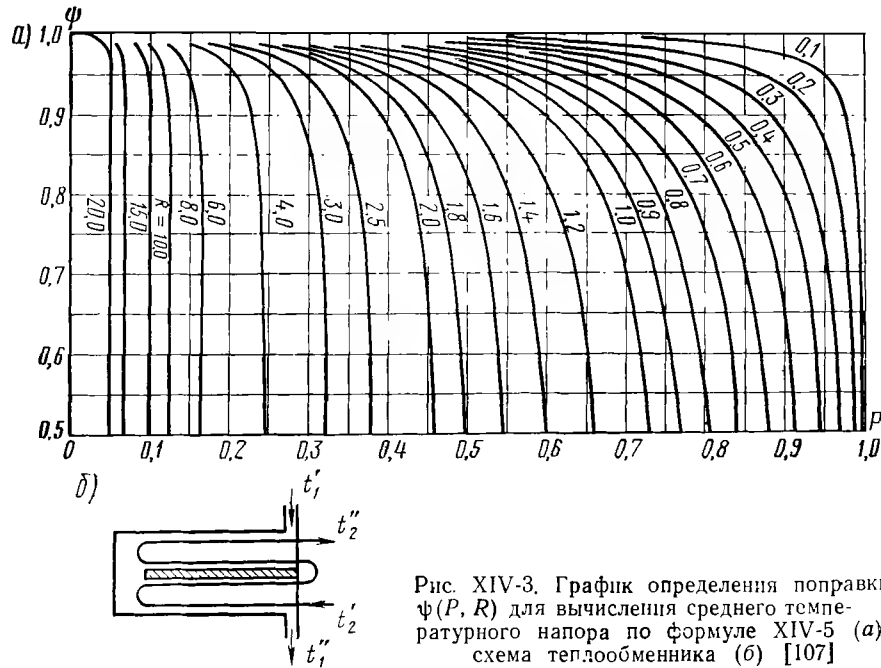


Рис. XIV-3. График определения поправки $\psi(P, R)$ для вычисления среднего температурного напора по формуле XIV-5 (а); схема теплообменника (б) [107]

Определив P и R для конкретной схемы теплообменника, находят коэффициент ψ по графикам рис. XIV-2,а или рис. XIV-3,а; далее по формуле (XIV-5) вычисляют средний температурный напор $\Delta t_{ср}$.

Выше уже отмечалось, что противоточная схема является наиболее эффективной по сравнению с прямоточной. Критерием для оценки

эффективности служит величина среднего температурного напора $\Delta t_{ср}$ (XIII-2); в противоточной схеме она во многих случаях оказывается больше, чем в прямоточной. Следовательно, поверхность нагрева теплообменника с противоточной схемой движения жидкостей будет меньше, чем с прямоточной, значит при прочих равных условиях он будет наиболее компактным, а затраты материала на его изготовление наименьшими. Кроме того, при осуществлении противотока можно получить более высокую конечную температуру t_1'' для нагреваемой жидкости, чем при прямотоке; t_1'' может стать даже выше температуры t_2' греющей жидкости на выходе, что в прямоточной схеме невозможно. Однако существуют условия, при которых схема противотока теряет свои преимущества перед прямотоком и они обе оказываются равноценными. Вот эти условия: значения водяных эквивалентов греющей и нагреваемой жидкости резко различаются, т. е. либо $W_1 \gg W_2$, либо, наоборот, $W_1 \ll W_2$; средний температурный напор $\Delta t_{ср}$ значительно превышает полное изменение температуры греющей $\Delta t_{гр} = t_2' - t_2''$ или нагреваемой $\Delta t_{нагр} = t_1' - t_1''$ жидкостей, т. е.

$$\Delta t_{ср} \gg \Delta t_{гр} \text{ или } \Delta t_{ср} \gg \Delta t_{нагр} [63].$$

Теперь вернемся к задаче об определении площади поверхности нагрева теплообменного аппарата. Сопоставляя уравнения (XIV-1) и (XIV-2), получим

$$F = \frac{W_1 (t_1' - t_1'')}{\Delta t_{ср} k} \quad (\text{XIV-8})$$

или, что то же,

$$F = \frac{W_2 (t_2' - t_2'')}{\Delta t_{ср} k}. \quad (\text{XIV-8a})$$

Для того чтобы спроектировать теплообменник с наименьшими затратами материала на единицу переносимой в нем теплоты, нужно выбрать такую компоновку и так организовать движение жидкостей, чтобы поверхность нагрева F (XIV-8) была наименьшей. Из (XIV-8) следует, что для этого нужно добиваться осуществления в теплообменнике наибольших $\Delta t_{ср}$ и k .

Некоторые соображения относительно способов повышения $\Delta t_{ср}$ уже высказывались выше. Рассмотрим возможности повышения коэффициента теплопередачи k . Как известно из (I-12), он равен

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Тепловое сопротивление стенки δ/λ по сравнению с тепловыми сопротивлениями перехода теплоты от жидкостей к стенкам $\frac{1}{\alpha_1}$ и $\frac{1}{\alpha_2}$ мало и им можно пренебречь. Представим знаменатель (I-12) в виде

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}; \quad (\text{XIV-9})$$

пусть, например, $\alpha_1 \gg \alpha_2$, тогда из (XIV-9) следует, что тепловое сопротивление можно значительно уменьшить, только увеличивая меньший коэффициент теплоотдачи α_2 . Увеличение в этих условиях большего коэффициента теплоотдачи α_1 практически не окажет влияния на уменьшение общего теплового сопротивления (XIV-9).

Заметим, что величины α_1 и α_2 в некоторой степени связаны с гидравлическим сопротивлением движению жидкости в теплообменном аппарате. Обычно увеличение α_1 и α_2 связано с увеличением гидравлического сопротивления, а следовательно, и с увеличением затраты мощности на проталкивание жидкостей через теплообменник. Отыскание оптимального соотношения между значениями α_1 , α_2 и величиной гидравлического сопротивления в значительной степени составляет содержание экономической задачи и с методами ее решения можно познакомиться в специальной литературе [50, 51].

При теплотехническом расчете теплообменных аппаратов наиболее трудной задачей является определение коэффициентов теплоотдачи α_1 и α_2 .

Методы определения этих коэффициентов для конкретных условий взаимодействия жидкости с твердым телом рассмотрены в главах VII, VIII, IX, X, XI и XII.

1. Авдеевский В. С., Данилов Ю. И., Кошкин В. К., Кутырин И. Н., Михайлов М. М., Михеев Ю. С., Сергеев О. С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. Оборонгиз, 1960.

2. Аладьев И. Т. Дополнение к русскому изданию книги Л. Тонга «Теплопередача при кипении и двухфазное течение». «Мир», 1969.

3. Андреев А. А., Дахно В. Н., Савин В. К., Юдаев Б. Н. Исследование теплообмена в области градиентного течения при натекании плоской турбулентной струи на пластину, расположенную нормально к потоку. «Инженерно-физический журнал», т. XVIII, 1970, № 4.

4. Андреев А. А., Дахно В. Н., Савин В. К., Цирлин О. В., Юдаев Б. Н. Особенности теплообмена в окрестности критической точки при натекании турбулентной струи на пластину, расположенную нормально к потоку. «Известия вузов», 1970, № 3.

5. Андреев А. А., Дахно В. Н., Цирлин О. В., Федотов Е. И., Юдаев Б. Н. Исследование теплообмена в критической точке при натекании осесимметричной струи на пластину, расположенную нормально к потоку. «Известия вузов», 1970 № 7.

6. Аржанников Н. С., Садекова Г. С. Аэродинамика больших скоростей. «Высшая школа», 1965.

7. Баум В. А., Бридлик П. М. «Теплоэнергетика», 1957, № 1.

8. Белоцерковский О. М. (ред.). Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Вычислительный центр АН СССР, 1966.

9. Божко Д. Ф., Молодых Э. И. Известия вузов, сер. «Машиностроение». 1968, № 4; 1969, № 2.

10. Боришанский В. М., Кутателадзе С. С., Новиков И. И., Федынский О. С. Жидкометаллические теплоносители. Атомиздат, 1967.

11. Бронштейн В. И., Юдаев Б. Н., Перельман Т. Л. Сверхзвуковое обтекание затупленного тела смесью газов с химическими реакциями. «Инженерно-физический журнал», Т. XXI, 1971, № 2.

12. Вайс Дрифт Е. Р. Турбулентный пограничный слой в сжимаемых жидкостях. Перевод ВИНТИ № 47695/4, 1965.

13. Вукалович М. П., Новиков И. И. Техническая термодинамика. Госэнергоиздат, 1962.

14. Гинзбург И. П. Аэрогазодинамика, «Высшая школа», 1966.

15. Гинзбург И. П. Теория сопротивления и теплопередачи. Изд. Ленинградского университета, 1970.

16. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., ИЛ, 1961.

17. Головинцев А. Г., Юдаев Б. Н. Техническая термодинамика. Машгиз, 1961.

18. Головинцев А. Г., Юдаев Б. Н., Федотов Е. И. Техническая термодинамика и теплопередача. «Машиностроение», 1970.

19. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. М., ИЛ, 1958.

20. Гухман А. А., Илюхи Н. В. Основы учения о теплообмене при течении газа с большой скоростью. Машгиз, 1951.

21. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. «Высшая школа», 1963.

22. Гухман А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. «Высшая школа», 1967.

23. Гухман А. А. и др. «Журнал технической физики» а) 1,281, 1934 г.; б) № 12, 1954 г.

24. Дейч М. Е. Техническая газодинамика. Госэнергоиздат, 1961.

25. Доронницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. «Прикладная математика и механика», вып. 6, 1942.
26. Доронницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Труды III Всесоюзного математического съезда 1956. Т. III, Изд. АН СССР, 1958.
27. Дорренс У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. «Мир», 1966.
28. Дракин И. И. Аэродинамический и лучистый нагрев в полете. Оборонгиз, 1961.
29. Жукаускас А. А. Доклад по опубликованным работам на соискание ученой степени доктора технических наук. Москва, 1962 г., Энергетический институт им. Г. М. Кржижановского.
30. Жуковский В. С. Основы теории теплопередачи. Госэнергоиздат, 1960.
31. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
32. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. «Энергия», 1965.
33. Капица П. Л. Журнал экспериментальной и теоретической физики а) Т. 18, вып. 1, 1948 г.
34. Капица П. Л., и Капица С. П. Журнал экспериментальной и теоретической физики. Т. XIX, вып. 2, 1949.
35. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. «Наука», 1964.
36. Кейс В. М. Конвективный тепло- и массообмен. «Энергия», 1972.
37. Кирпичев М. В., Михеев М. А. и Эйгенсон Л. С. Теплопередача. Госэнергоиздат, 1940.
38. Конаков П. К. Теория подобия и ее применение в теплотехнике. Госэнергоиздат, 1959.
39. Кондратьев Г. М. Регулярный тепловой режим. ГИТТЛ, 1954.
40. Краснов Н. Ф. Аэродинамика тел вращения. «Машиностроение», 1964.
41. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н., Захарченко В. Ф. Аэродинамика ракет. «Машиностроение», 1969.
42. Кружилин Г. Н. «Журнал технической физики», Т. VI, вып. 3, 1936.
43. Кружилин Г. Н. «Журнал технической физики». Т. VI, вып. 5, 1936.
44. Кружилин Г. Н. ДАН СССР, ОТН, 1948, № 7.
45. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена, «Наука», Сибирское отделение, Новосибирск, 1970.
46. Кутателадзе С. С. Теплопередача при конденсации и кипении. Машгиз, 1952.
47. Кутателадзе С. С. и Боришанский В. М. Справочник по теплопередаче. Госэнергоиздат, 1959.
48. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепло-массообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.
49. Лабунцов Д. А. а) «Теплоэнергетика», 1950; № 12, б) 1963; № 5, в) Изв. АН СССР, ОТН, «Энергетика и транспорт», 1963, № 1.
50. Лебедев П. Д. Теплообменные сушильные и холодильные установки. «Энергия», 1966.
51. Лебедев П. Д. (ред.), Григорьев В. А., Колач Т. А., Соколовский В. С., Темкин Р. М. Краткий справочник по теплообменным аппаратам. Госэнергоиздат, 1962.
52. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1960.
53. Леонтьев А. И., Мухин В. А., Миронов Б. П., Ивкин В. П. Влияние граничных условий на развитие теплового пограничного слоя. Тепло- и массообмен. Т. I, «Энергия», 1968.
54. Леонтьев А. И., Кирдяшкин А. Г. Экспериментальное исследование свободной конвекции в горизонтальных и вертикальных слоях жидкости. Тепло- и массообмен. «Энергия», 1968.
55. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1957.
56. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
57. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», 1967.
58. Лыков А. В. Теоретические основы строительной теплофизики. Изд. АН БССР, Минск, 1961.
59. Лыков А. В. и Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса. Госэнергоиздат, 1963.
60. Мак-Адамс В. Х. Теплопередача. Metallurgizdat, 1961.
61. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1956.
62. Мучник Г. Ф., Рубашов И. Б. Методы теории теплообмена, М., «Высшая школа», 1970.
63. Новиков И. И. и Воскресенский К. Д. Прикладная термодинамика и теплопередача. Госатомиздат, 1961.
64. Петухов Б. С. Опытное изучение процессов теплопередачи. Госэнергоиздат, 1952.
65. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. «Энергия», 1967.
66. Планк М. Введение в теоретическую физику. Т. V. ОНТИ, 1935.
67. Планк М. Теория теплового излучения. ОНТИ, 1938.
68. Поляк Г. Л. «Известия Энергетического института АН СССР», Т. III, вып. 1—2, 1935.
69. Розенау У. М. Теплообмен при кипении. Сборник «Современные проблемы теплообмена». «Энергия», 1966.
70. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. «Наука», 1965.
71. Сполдинг Д. Б. Конвективный массоперенос. «Энергия», 1965.
72. Сукомел А. С. Теплопроводность. Изд. МЭИ, 1962.
73. Суринов Ю. А. Сборник «Проблемы энергетики». Изд. АН СССР, 1959.
74. Теория теплообмена. Терминология, Вып. 83. «Наука», 1970.
75. Тепло- и массоперенос. Т. I, «Энергия», 1968.
76. Термодинамика газов. «Машиностроение», 1970.
77. Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнения математической физики. «Наука», 1966.
78. Тонг Л. Теплопередача при кипении и двухфазное течение. «Мир», 1969.
79. Толубинский В. И. Известия вузов, «Энергетика». а) № 1, 1959; б) № 9, 1962; в) № 10, 1963 г.
80. Турбулентные течения и теплопередача. Сборник статей. ИЛ, 1963.
81. Уваров В. В. Введение в теплопередачу (конспект лекций). Изд. Академии им. Н. Е. Жуковского, 1934.
82. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. «Наука», 1964.
83. Фей Н., Риддел Г. Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом. Сборник «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». ИЛ, 1962.
84. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. «Наука», 1967.
85. Хинце И. С. Турбулентность, ее механизм и теория. Физматгиз, 1963.
86. Цедерберг Н. В. Теплопроводность газов и жидкостей. Госэнергоиздат, 1961.
87. Широков М. Ф. Физические основы газодинамики и применения ее к процессам теплообмена и трения. Физматгиз, 1958.
88. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. «Наука», 1969.
89. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. ИЛ, 1960.
90. Шорин С. Н. Теплопередача. «Высшая школа», 1964.

91. Эккерт Э. Р. Инженерные соотношения для расчета теплообмена и трения в высокоскоростном ламинарном и турбулентном пограничном слое на поверхностях с постоянным давлением и температурой. Перевод ВИНТИ № 47696/4, 1965.

92. Эккерт Э. Р. и Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. Госэнергониздат, 1961.

93. Юдаев Б. Н. (ред.). Сборник задач по технической термодинамике и теплопередаче. «Высшая школа», 1964.

94. Юдаев Б. Н. и Федотов Е. И. Теплообмен цилиндра в потоке газа высокой температуры и скорости. «Известия вузов», 1966, № 11.

95. Юдаев Б. Н. и Федотов Е. И. О моделировании аэродинамического нагрева. «Известия вузов», 1966, № 12.

96. Юдаев Б. Н. и Федотов Е. И. Абляция пластины в сверхзвуковом потоке газа. «Известия вузов», 1967, № 9.

97. Юдаев Б. Н. (ред.). Сборник задач по технической термодинамике и теплопередаче. «Высшая школа», 1968.

98. Юдаев Б. Н. и др. Экспериментальное исследование теплообмена при натекании турбулентных струй на преграды. «Известия вузов», № 11, 1971.

99. Юдаев Б. Н., Дахно В. Н. Влияние турбулентности на теплообмен при взаимодействии плоской струи с преградой при различных углах встречи. Тепло- и массоперенос. Т. 1, часть II, Минск, 1972.

100. Lieberman G. Trans. ASME, 1956, русский перевод см. в сб. «Механика», № 3, М., ИЛ, 1957.

101. Sibulkin M. Heat Transfer Near the Forward Stagnation Point of a Body of Revolution, Jour. Aero. Sciences, vol. 19, № 8 (August, 1952), pp. 570—571, русский перевод см. в сб. «Механика», № 3 (19), М., ИЛ, 1953.

102. Truitt R. W. Fundamentals of Aerodynamic Heating, The Ronald Press Company, New York, 1960.

103. Van Driest E. R. The problem of Aerodynamic Heating, Aero. Eng. Rev., Vol. 15, № 10 (October, 1956).

104. Linke W., and Kunze, H., Allgem. Warmetech., vol. 4, 1953.

105. Giedt W. H., Trans ASME, vol. 71, 1949.

106. Karman T., and Tsien H. S. Boundary Layer in Compressible Fluids, Jour. Aero. Sciences, 5, 1938.

107. Gebhart B., Heat Transfer, Mc Graw — Hill book company, inc. New York, 1961.

108. Goldstein S. Modern developments in Fluid Dynamic. Vol I and Vol II Fair Lawn, N. J. Oxford University Press, 1950.

109. Jakob M., Linkew. Heat Transmission in the Evaporation of Liquids at Vertical and Horizontal Surfaces, Z. Physik, 36, 1935.

110. Smith M. C., Kueth A. M. The Physics of Fluids, № 12, 1966.

111. Sparrow E. M., Cess R. D. Radiation Heat Transfer, 1968.

112. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N. Transport Phenomena, 1966.

113. Newnham J. Blasius series for Heat and mass transfer, Zif. J. Heat Mass Transfer, vol. 9, 1966.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Основные законы переноса теплоты	4
§ 1. Теплопроводность	5
§ 2. Теплоотдача и теплопередача	7
§ 3. Теплообмен излучением	9
§ 4. Коэффициент вязкости	11
§ 5. Коэффициент теплопроводности	14
§ 6. Коэффициент теплоотдачи	15
Глава II. Основные дифференциальные уравнения теплообмена	15
§ 1. Уравнение сплошности	17
§ 2. Уравнение движения	22
§ 3. Уравнение механической энергии	24
§ 4. Уравнение энергии	29
§ 5. Краевые условия	31
Глава III. Метод обобщенных переменных	31
§ 1. Содержание метода	32
§ 2. Обобщенные переменные	33
§ 3. Обобщенные уравнения	38
§ 4. Моделирование	46
§ 5. Анализ размерностей	49
Глава IV. Теплопроводность при стационарном режиме	53
§ 1. Теплопроводность в телах с одномерным полем температуры	53
§ 2. Теплопроводность в теле с внутренними источниками теплоты	59
§ 3. Теплопроводность в теле с двумерным полем температуры	64
§ 4. Теплопроводность в ребре постоянного поперечного сечения	70
Глава V. Теплопроводность при нестационарном режиме	73
§ 1. Общее решение уравнения одномерной теплопроводности	73
§ 2. Теплопроводность неограниченной плоской стенки	75
§ 3. Теплопроводность в неограниченных телах	93
§ 4. Теплопроводность в полуграниченном теле с одномерным полем температуры (одномерная задача)	95
§ 5. Теплопроводность тела ограниченных размеров	98
Глава VI. Приближенные методы решения задач теплопроводности	102
§ 1. Численные методы решения задач теплопроводности при стационарном режиме	102
§ 2. Численные методы решения задач теплопроводности при нестационарном режиме	109
§ 3. Решение задачи теплопроводности методом аналогий	112
Глава VII. Исследование теплоотдачи методами теории пограничного слоя	117
§ 1. Уравнения динамического пограничного слоя	120
§ 2. Интегральное уравнение динамического пограничного слоя	126
§ 3. Уравнение энергии для пограничного слоя	136
§ 4. Интегральное уравнение энергии для пограничного слоя	139
§ 5. Трение и теплоотдача в ламинарном пограничном слое	140
§ 6. Турбулентный пограничный слой	144
§ 7. Уравнения турбулентного пограничного слоя	149
§ 8. Трение и теплоотдача в турбулентном пограничном слое	158
§ 9. Исследование пограничного слоя с помощью полуэмпирической теории турбулентности	166
§ 10. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача в трубах	167
Глава VIII. Теплоотдача в передней критической точке	175
§ 1. Теплоотдача в окрестности критической точки при взаимодействии плоского ламинарного потока с пластиной, расположенной нормально к его направлению	176

§ 2. Теплоотдача в окрестности критической точки при взаимодействии осесимметричного, ламинарного потока с пластиной, расположенной нормально к его направлению	180
§ 3. Теплоотдача в окрестности критической точки при взаимодействии плоской турбулентной струи с пластиной, расположенной нормально к направлению скорости потока	182
§ 4. Теплоотдача в окрестности критической точки при взаимодействии осесимметричной турбулентной струи с пластиной, расположенной нормально к направлению скорости потока	190
Глава IX. Теплоотдача при свободной конвекции	193
§ 1. Уравнения пограничного слоя	194
§ 2. Интегральные уравнения пограничного слоя	196
§ 3. Теплоотдача при свободной конвекции в неограниченном пространстве	198
§ 4. Теплоотдача при свободной конвекции в ограниченном пространстве	200
Глава X. Теплоотдача при вынужденной конвекции	204
§ 1. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости в трубах	205
§ 2. Теплоотдача при поперечном обтекании труб	210
§ 3. Теплоотдача в жидких металлах	217
Глава XI. Теплоотдача при больших скоростях	219
§ 1. Дифференциальные уравнения сжимаемого ламинарного пограничного слоя	224
§ 2. Некоторые результаты решения дифференциальных уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя	231
§ 3. Решение интегральных уравнений ламинарного сжимаемого пограничного слоя	234
§ 4. Упрощенный метод определения коэффициентов трения C_f и теплоотдачи α в ламинарном пограничном слое с учетом сжимаемости и переменности физических констант газа	237
§ 5. Дифференциальные и интегральные уравнения сжимаемого турбулентного пограничного слоя	241
§ 6. Упрощенный метод определения коэффициентов трения C_f и теплоотдачи α в турбулентном слое с учетом сжимаемости	262
§ 7. Тепло- и массообмен с химическими реакциями в диссоциированном газе	263
§ 8. Теплоотдача в передней критической точке	276
§ 9. Теплоотдача в разреженных газах	279
§ 10. Аэродинамическое нагревание	289
§ 11. Теплоотдача в трубах и соплах	291
Глава XII. Теплоотдача при конденсации и кипении жидкости	294
§ 1. Теплоотдача при конденсации пара	—
§ 2. Теплоотдача при кипении жидкости	302
§ 3. Критическая плотность теплового потока	314
Глава XIII. Теплообмен излучением	318
§ 1. Определения и понятия	—
§ 2. Законы теплового излучения	325
§ 3. Теплообмен излучением между параллельными пластинами, разделенными прозрачной средой	329
§ 4. Теплообмен излучением в поглощающей среде	332
§ 5. Теплообмен излучением в реальных газах и парах	338
Глава XIV. Теплообменные аппараты	347
§ 1. Классификация теплообменных аппаратов	—
§ 2. Схема теплового расчета теплообменного аппарата	—
Литература	353